МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Югорский государственный университет» (ЮГУ)

ЛЯНТОРСКИЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИКУМ
(филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Югорский государственный университет»
(ЛНТ (филиал) ФГБОУ ВО «ЮГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению практических работ
по дисциплине ЕН.02 Дискретная математика с элементами математической логики
специальность 09.02.07 Информационные системы и программирование

Лянтор
2021

УДК 510
М54

Рекомендовано Методическим советом ЛНТ (филиал) ФГБОУ ВО «ЮГУ» в качестве учебно-методического пособия. Протокол № 8 заседания Методического совета ЛНТ от 26.03.2021 г.

М 54 **Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине** ЕН.02 Дискретная математика с элементами математической логики **специальность** 09.02.07 Информационные системы и программирование : учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование/ составитель О.В. Кийдан; Министерство науки и высшего образования РФ, ЛНТ (филиал) ФГБОУ ВО «ЮГУ». – Лянтор: ЛНТ, 2021.– 30 с.

УДК 510

Содержание

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯЗАПИСКА

Методическиеуказанияповыполнениюпрактическихработпредназначеныдляупорядочения работыобучающихся,разработанынаосновеФедеральногогосударственногообразовательногостандартасреднегопрофессиональногообразованияпоспециальности09.02.07Информационныесистемыипрограммирование.

Структураметодическихуказанийопределенапоследовательностьюизучениядисциплины Элементы высшей математики,котораявходитвматематическийиобщийестественнонаучныйциклдисциплинспециальности.

ПрограммойдисциплиныДискретная математика с элементами математической логики специальности предусмотреновыполнениепрактическихработвколичестве12часов.

Практическиезанятияслужатсвязующимзвеноммеждутеориейипрактикой.Онинеобходимы длязакреплениятеоретическихзнаний,полученныхнаурокахтеоретическогообучения,атакжедляполученияпрактическихзнаний.Практическиезаданиявыполняютсястудентомсамостоятельно,сприменениемзнанийиумений,полученныхнауроках,атакжесиспользованиемнеобходимыхпояснений,полученныхотпреподавателяпривыполнениипрактическогозадания

Врезультатеосвоениядисциплиныобучающийсядолженуметь:

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений
- решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления
- решать дифференциальные уравнения
- пользоваться понятиями теории комплексных чисел

Врезультатеосвоениядисциплиныобучающийсядолжензнать:

Врезультатеосвоениядисциплиныобучающийсядолженобладатьобщимикомпетенциями,включающимивсебяспособность:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам;

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие;

ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей;

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности;

ОК 10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

ОК 11. Планировать предпринимательскую деятельность в результате освоения дисциплины обучающийся должен обладать профессиональными компетенциями, соответствующими видам деятельности:

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Номер работы	Тема	Наименование работы	Кол-во часов
1	1.1	Формулы логики	2
2	1.2	Представление булевой функции в виде СДНФ и СКНФ, минимальной ДНФ и КНФ	2
3	2.1	Множества и основные операции над ними	2
4	3.1	Нахождениеобластиопределенияи истинности предиката	2
5	4.1	Исследование отображений и свойств бинарных отношений с помощью графов.	2
6	5.1	Работа машины Тьюринга	2
Итого			12

ПРАВИЛАВЫПОЛНЕНИЯПРАКТИЧЕСКИХРАБОТ

Практическиеработыпроводятсявходеосуществленияучебногопроцессаинаправленыназакреплениетеоретическогоматериала.Практическиеработыоформляютсявписьменномвиде,преподавательпроверяетотчетстудентаовыполненнойпрактическойработеиделаетотметкувжурналеучебных занятий.

Ккаждомупрактическомузанятиюпреподавателямиразработаныинструкциипоихпроведению.Всодержанииинструкциикаждойпрактическойработыданыкраткиетеоретическиесведенияилиформулы,примерырешениязадач,изаданиядлясамостоятельногорешенияповариантам.Практическиеработынеобходимовыполнятьвтетрадяхсуказаниемномера,темы,целейработы.

Передвыполнениемпрактическойработыпреподавательпроверяетготовностьстудентовкеевыполнению.Преподавательконтролируетвыполнениепрактическойработывсоответствиисинструкциейпопроведению.Неподготовленныеобучающиесяквыполнениюработынедопускаются.

Изучаятеоретическоеобоснование,студентдолжензнать,чтоосновнойцельюизучениятеорииявляетсяумениеприменятьеенапрактике.

Послевыполненияработыстудентдолженпредставитьотчетопроделаннойработесполученнымирезультатамииустноеезащитить.

Приотсутствиистудентапонеуважительнойпричиневыполняетработусамостоятельнововнеаудиторноевремяизащищаетнаконсультации.

Неаккуратновыполненнаяпрактическаяработавозвращаетсядлядоработки.

Показателиоценкипрактическойработыподисциплине:

- умениеобучающегосяиспользоватьтеоретическиезнанияпривыполнениипрактическихзаданий;
- уровеньосвоенияобучающимисяучебногоматериала;
- правильностьичеткостьизложенияответа;
- оформлениематериалавсоответствиистребованиями.

Критерииоцениванияпрактическихработ

Отметка«5»ставиться,если:

-работавыполненаполностью;

-влогическихрассужденияхиобоснованиирешениянетпробеловиошибок;

-врешениинетматематическихошибок(возможнаоднанеточность,описка,неявляющаясяследствиемнезнанияилинепониманияучебногоматериала).

Отметка«4»ставится,если:

-выполнено75-90%заданий;

-либоработавыполненаполностью,нообоснованияшаговрешениянедостаточны;

-допущенаоднаошибкаилидва-тринедочетаввыкладках,рисунках,чертежахилиграфиках(еслиэтивидыработынеявляютсяспециальнымобъектомпроверки).

Отметка«3»ставиться,если:

-выполнено51-75%заданий;

-допущеныболееоднойошибкиилиболеедвух-трехнедочетовввыкладках,чертежахилиграфиках,нообучающийсявладеетобязательнымиумениямипопроверяемойтеме.

Отметка«2»ставится,если:

-выполненоменее50%заданий;

-допущенысущественныеошибки,показавшие,чтообучающийсяневладеетобязательнымиумениямиподаннойтемевполноймере.

Практическаяработа№1

Тема.Формулы логики.

Цель:научиться формализовывать высказывания, строить таблицы истинности для формул логики, упрощать формулы логики с помощью равносильных преобразований.

Студентдолжензнать:

- основные формулы алгебры высказываний,
- методы минимизации алгебраических преобразований;

Студентдолженуметь:

- формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

Теоретическоеобоснование

Учение о высказываниях – алгебра высказываний, или алгебра логики, – является простейшей логической теорией. Атомарным понятием алгебры высказываний является ***высказывание*** – повествовательное предложение, в отношении которого имеет смысл утверждение об его истинности или ложности.

Пример истинного высказывания: "Земля вращается вокруг Солнца". Пример ложного высказывания: "3 > 5". Не всякое предложение является высказыванием, к высказываниям не относятся вопросительные и восклицательные предложения. Не является высказыванием предложение: «Каша – вкусное блюдо», так как не может быть единого мнения о том, истинно оно или ложно. Предложение «Есть жизнь на Марсе» следует считать высказыванием, так как объективно оно либо истинно, либо ложно, хотя никто пока не знает, какое именно.

Поскольку предметом изучения логики являются только значения истинности высказываний, для них вводят буквенные обозначения A, B, … или X, Y...

Считается, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно. Для краткости, будем вместо значения истинно писать 1, а вместо значения ложно – 0. Например, X = "Земля вращается вокруг Солнца" и Y = "3 > 5", причем X =1 и Y = 0. Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

Высказывания могут быть простыми и составными. Высказывания "Земля вращается вокруг Солнца" и "3 > 5" являются простыми. Составные высказывания образуются из простых с помощью связок естественного (русского) языка НЕ, И, ИЛИ, ЕСЛИ-ТО, ТОГДА-И-ТОЛЬКО-ТОГДА. При использовании буквенных обозначений для высказываний эти связки заменяются специальными математическими символами, которые можно рассматривать как символы логических операций.

Ниже, в таблице 1 приведены варианты символов для обозначения связок и названия соответствующих логических операций.

Отрицанием (инверсией) высказывания *X* называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда *X* ложно (обозначается $\neg X$ или $\overline{X}$, читается “не *X*” или “неверно, что *X*”).

Конъюнкцией $X \& Y$ двух высказываний называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания *X* и *Y*. Эта логическая операция соответствует соединению высказываний союзом ”и”.

Дизъюнкцией $X \vee Y$ двух высказываний *X* и *Y* называется высказывание ложное в том и только в том случае, когда оба высказывания *X* и *Y* ложны. В разговорной речи этой логической операции соответствует союз “или” (не исключающее “или”).

Импликацией двух высказываний *X*и*Y* называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда *X* истинно, а *Y* – ложно (обозначается $X \to Y$; читается “*X* влечет *Y*”, “если *X*, то *Y*”). Операнды этой операции имеют специальные названия: *X* – посылка, *Y* – заключение.

Эквиваленцией двух высказываний *X* и *Y* называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения *X* и *Y* одинаковы (обозначение: $X \sim Y$, $X \leftrightarrow Y$).

Таблица 1. Логические операции

Связка	Варианты символов	Наименование операции
не	⌉ ‾	отрицание
и	& /\ ·	конъюнкция
или	\/	дизъюнкция
если то	$\rightarrow$	импликация
тогда и только тогда	$\leftrightarrow$ ~	эквивалентность

Операнды логических операций могут принимать только два значения: 1 или 0. Поэтому каждую логическую операцию $\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ легко задать с помощью таблицы, указав значение результата операции в зависимости от значений операндов. Такая таблица называется ***таблицей истинности*** (табл. 2).

Таблица 2. Таблица истинности логических операций

X	*Y*	$\neg$ X	X&Y	X$\vee$Y	X$\rightarrow$Y	X$\leftrightarrow$Y
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

С помощью логических операций, определенных выше, можно из простых высказываний строить ***формулы логики высказываний***, представляющие различные составные высказывания. Логическое значение составного высказывания зависит от структуры высказывания, выраженной формулой, и логических значений образующих его элементарных высказываний.

Для систематического изучения формул, выражающих высказывания, вводят переменные высказывания $P, P_1, P_2, ..., P_N$, принимающие значения из множества $\{0, 1\}$.

Формула логики высказываний $F(P_1, P_2,..., P_N)$ называется тавтологией или ***тождественно истинной***, если ее значение для любых значений $P_1, P_2,..., P_N$ есть 1 (истина). Формулы, принимающие значение "истина" хотя бы при одном наборе списка переменных, называются ***выполнимыми***. Формулы, принимающие значение "ложь" при любых значениях переменных, называются ***противоречиями*** (тождественно ложными, невыполнимыми).

Пример 1:

Даны два высказывания:

A={число 174 делится на 3}, B={идет дождь}.

В чем заключаются высказывания:

$\overline{A}, A\vee B, A\& B, A\rightarrow B, \overline{A}\rightarrow B, A\leftrightarrow \overline{B}$?

Какие из этих высказываний истинны, а какие ложны?

Решение:

1) По определению операции отрицания:
   $\overline{A}=$ {число 174 не делится на 3}. Данное высказывание является ложным.
2) $A\vee B=$ {число 174 делится на 3 или идет дождь}. Так как высказывание A является истинным, то независимо от логического значения высказывания B высказывание $(A\vee B)$ является истинным (см. табл.2).
3) $A\& B=$ {число 174 делится на 3 и идет дождь}. Если высказывание B является истинным, то высказывание $(A\& B)$ истинно. Иначе, если B ложно, то и $(A\&B)$ ложно.
4) $A\rightarrow B=$ {если число 174 делится на 3, то идет дождь}. Высказывание $(A\rightarrow B)$ ложно только в случае, когда высказывание B ложно.
5) $\overline{A}\rightarrow B=$ {если число 174 не делится на 3, то идет дождь}. Данное высказывание истинно.

6) $A \leftrightarrow \overline{B}$ = {число 174 делится на 3 тогда и только тогда, когда не идет дождь}. Так как высказывание A истинно, то $A \leftrightarrow \overline{B}$ будет истинным в случае, когда высказывание $\overline{B}$ истинно. Таким образом, сложное высказывание $A \leftrightarrow \overline{B}$ истинно, если B ложно.

Пример 2:

Выпишите все подформулы формулы

$F = ((A_0 \to A_1)\,\&\,(A_1 \to A_2)) \to \overline{A_0}$.

Решение:

Для решения примера воспользуемся определением:

Подформулой формулы Aназывается любое подсловоA, само являющееся формулой.

Вначале выписываем все высказывательные переменные, затем отрицания высказывательных переменных и далее логические выражения:

A_0; A_1; A_2; $\overline{A_0}$; $(A_0 \to A_1)$; $(A_1 \to A_2)$; $(A_0 \to A_1)\,\&\,(A_1 \to A_2)$.

Пример 3:

Для формулы $F = (A_1 \to \overline{A_2})\,\&\,(\overline{A_1} \lor A_2)$ составьте таблицу истинности. Определите, является ли данная формула тождественно истинной, выполнимой или невыполнимой.

Решение:

Расставим приоритеты логических операций:

$$\begin{array}{l} \quad\ \ \textbf{2}\quad \textbf{1}\quad\ \textbf{5}\quad \textbf{3}\ \ \textbf{4} \\ F = (A_1 \to \overline{A_2})\,\&\,(\overline{A_1} \lor A_2). \end{array}$$

Таблица истинности будет иметь следующий вид:

A_1	A_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0

Данная формула алгебры высказываний является выполнимой, так как принимает значение “истина” при двух наборах списка переменных.

Ходработы

1. Среди следующих предложений выделить те, которые являются высказываниями, и установить, если это возможно, истинны они или ложны.

1) Для произвольных множеств A и Bверно включение $A \subset A \cup B$.
2) Сумма углов в треугольнике равна 180°.
3) Информатика – самый интересный предмет.
4) $\sqrt{2} \in N$.
5) Солнечная система насчитывает девять больших планет.
6) На улице светит солнце.
7) Летайте самолетами Аэрофлота!
8) Всякое подмножество конечного множества конечно.

2. Даны два высказывания:

$P = \{\textit{конъюнкция коммутативна}\}$, $Q = \{\textit{если число нечетное, то оно простое}\}$.

В чем заключаются высказывания:

$\overline{Q}$, $\overline{Q \to P}$, $(P\,\&\,\overline{Q}) \to P$, $(Q \lor P) \to \overline{Q}$?

Какие из них истинны, а какие ложны?

3. В каких случаях приведенные ниже данные противоречивы?

1) $a = 1,\ \ a\,\&\,b = 1$;
2) $a = 0,\ \ a\,\&\,b = 1$;
3) $a = 1,\ \ a \lor b = 0$;

4) $a = 0, \quad a \vee b = 1$.

4. Известно, что $x \to y$ имеет значение 1. Что можно сказать о значениях:

1) $z \to (x \to y)$;
2) $(\overline{x \to y}) \to y$;
3) $(x \to y) \to z$.

5. Выписать все подформулы следующих формул:

1) $((A \to B) \& (B \to D)) \to \overline{A} \vee D$;
2) $(\overline{A} \to \overline{B}) \leftrightarrow (B \leftrightarrow D)$;
3) $A_1 \& (A_2 \vee A_3 \& (B \vee C))$.

6. Составить таблицы истинности для формул:

1) $(A \to \overline{B}) \& (\overline{A} \vee B)$;
2) $(P \leftrightarrow Q) \to (P \& Q)$;
3) $(P \& (Q \to P)) \vee \overline{P}$;
4) $(P \& (Q \to \overline{P})) \& (\overline{Q} \to P) \vee Q$;
5) $(P \to (\overline{Q \& P})) \to P \vee R$;
6) $(P \& (Q \vee \overline{P})) \& ((\overline{Q} \to P) \vee Q)$;
7) $(A_1 \to (A_2 \to A_3)) \to ((A_1 \to A_2) \to (A_1 \to A_3))$.

7. Какие из высказываний P, Q, R должны быть истинны, а какие ложны, чтобы формула $(\overline{P} \& Q) \to R$ была истинной?

8. Доказать тождественную истинность формул:

1) $P \to (Q \to P \& Q)$;
2) $(P \to Q) \to ((P \to \overline{Q}) \to \overline{P})$;
3) $\overline{P} \to (P \to Q)$.

Контрольныевопросы

1. Какие предложения являются высказываниями математической логики:
   - «Летайте самолетами аэрофлота!»
   - «Математическая логика – интересный предмет»
   - «Существуют инопланетные цивилизации»
   - «Москва – столица России»
2. Составьте таблицу истинности для формулы $F = (A \leftrightarrow B) \to \neg A$.

Какая формула логики высказываний называется тавтологией.

Содержаниеотчета.

1.Решитьзадание№1-8, записатьегоответ.
2.Устноответитьнаконтрольныевопросы.

Практическая работа№2

Тема:Представление булевой функции в виде СДНФ и СКНФ, минимальной ДНФ и КНФ
Цель:научиться определять ДНФ и КНФ.

Студентдолжензнать:
- основные формулы алгебры высказываний,
- методы минимизации алгебраических преобразований;

Студентдолженуметь:
- определять ДНФ и КНФ

Теоретическоеобоснование

Элементарной конъюнкцией (ЭК) называется конъюнкция нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания, причем среди переменных могут быть одинаковые:

$$\overline{A}\& A;\ A\&\overline{C};\ A\& B\&\overline{C}.$$

Элементарной дизъюнкцией (ЭД) называется дизъюнкция нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания, причем среди переменных могут быть одинаковые:

$$\overline{A}\vee A;\ A\vee\overline{C};\ A\vee B\vee\overline{C}.$$

Элементарная конъюнкция (дизъюнкция) называется ***правильной***, если каждая переменная входит в нее не более одного раза, включая вхождения под знаком отрицания.

Правильная элементарная конъюнкция (дизъюнкция) называется ***полной*** относительно переменных $x_1, x_2,..., x_n$ если каждая из переменных входит в нее один и только один раз.

Например, для набора переменных x_1, x_2, x_3, x_4, $x_1 \& x_2 \& x_3 \& \overline{x_4}$ – полная правильная ЭК, а $x_1 \& \overline{x_1} \& x_2 \& x_3$ – неправильная ЭК.

Всякую дизъюнкцию элементарных конъюнкций назовем дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ):

$$(A\&\overline{B})\vee(\overline{A}\&\mathrm{C}).$$

Всякую конъюнкцию элементарных дизъюнкций назовем конъюнктивной нормальной формой (КНФ):

$$(A\vee\overline{B})\&(\overline{A}\vee\mathrm{C}).$$

СовершеннойДНФназывается ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все конъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно с отрицанием):

$$(A\&\mathrm{B}\&\overline{C})\vee(\mathrm{A}\&\mathrm{B}\&\mathrm{C}).$$

Совершенной КНФназывается КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все дизъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно с отрицанием):

$$(A\vee\mathrm{B}\vee\overline{C})\&(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}\vee\mathrm{C}).$$

Пример:

Записать формулу в ДНФ и КНФ:

$P\&(Q\to P)\to\neg P.$

Решение:

Построим ДНФ по алгоритму:

1) Заменяем импликацию: $F_1 \equiv \neg(P\&(\neg Q\vee P))\vee\neg P$.

2) Вносим знак отрицания, применяя закон де Моргана и закон идемпотентности, получаем:

$F_2 \equiv (\neg P\vee(Q\&\neg P))\vee\neg P$.

*3)*Преобразуем выражение с применением законов идемпотентности и поглощения:

$F_3 \equiv (Q\&\neg P)\vee(\neg P\vee\neg P)\equiv(Q\&\neg P)\vee\neg P\equiv\neg P$.

Формула $F_3 \equiv F$ в силу транзитивности отношения $\equiv$ и записана в ДНФ и КНФ.

Ходработы

1. Привести к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:

1) $((P \to Q) \to (R \to \overline{P})) \to (\overline{Q} \to \overline{R});$
2) $((((P \to Q) \to \overline{P}) \to \overline{Q}) \to \overline{R}) \to R;$
3) $(P \to (Q \to R)) \to (P \to \overline{R}) \to (P \to \overline{Q}).$

2. Привести к дизъюнктивной нормальной форме, построить карту Карно:

1) $A \to (B \,\&\, C);$
2) $(X \,\&\, Y) \to \overline{Y};$
3) $(B \to \overline{A}) \,\&\, C;$
4) $(A \leftrightarrow B) \,\&\, C;$
5) $(P \to Q) \to P;$
6) $\overline{A} \to (B \leftrightarrow C).$

3. Привести к совершенной дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам:

1) $(X \to Y) \,\&\, (\overline{Y} \to \overline{X});$
2) $\overline{((A \,\&\, B) \to \neg A)} \,\&\, \overline{((A \,\&\, B) \to \neg B)};$
3) $\overline{(X \leftrightarrow Y)};$
4) $(A \,\&\, B) \to (B \,\&\, C);$
5) $(X \vee Y) \to X;$
6) $(B \leftrightarrow \overline{C}) \,\&\, (A \to B);$
7) $(A \vee \overline{C}) \to (B \,\&\, C);$
8) $(X \leftrightarrow Y) \to (X \vee Y);$
9) $(B \to \overline{A}) \,\&\, (C \leftrightarrow B);$

Контрольныевопросы

1. Какие законы логики Вы использовали при представлении булевой функции в виде ДНФ и КНФ?
2. Что такое ДНФ?
3. Что такое КНФ?
4. Правила построения ДНФ?
5. Правила построения КНФ?
6. Логические операции над высказываниями

Содержаниеотчета.

1.Решитьзадание№1-3,записатьответ.
2.Устноответитьнаконтрольныевопросы.

Практическаяработа№3

Тема.Множества и основные операции над ними

Цель:формирование у обучающихся умений производить операции над множествами и применять полученные знания при решении практических задач.

Студентдолжензнать:

- свойства знаковых бинарных отношений на множестве и определять их вид

Студентдолженуметь:

- находить объединение, пересечение, разность, прямое произведением ножеств
- задавать множества путём перечисления элементов и правилом.

Теоретическоеобоснование

Множества – совокупность элементов, объединённых некоторым признаком или свойством.

Множество считается заданным, если или перечислены все его элементы или задано свойство, которым обладают те и только те элементы, которые принадлежат этому множеству.

Способы задания множеств:

1) $M=\{m_1, m_2 \ldots m_n\}$ – перечислением всех элементов
2) $M=\{a|P(a)\}$ множество M состоит из таких элементов a, которые обладают свойством P.

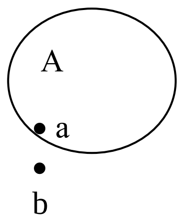
Множество можно задать процедурой, которая описывает способ получения элементов нового множества из уже существующего или других объектов.

Если множество не содержит элементов, обладающих характеристическим свойством, то оно является пустым(Ø).

Множество не являющееся пустым называется непустым.

Изображение множеств

Множества изображаются с помощью кругов Эйлера.



$a \in A$

$b \notin A$

Подмножество – множество K является подмножеством множества M, если $\forall X \in K$ выполняется $x \in M$.

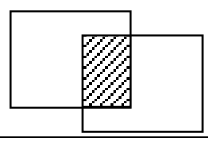
Для любого множества можно указать минимум два подмножества: оно само и пустое.

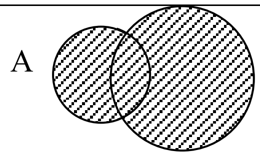
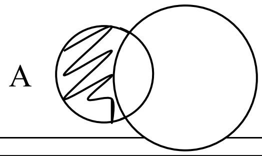
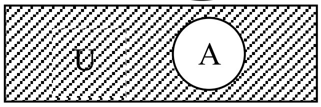
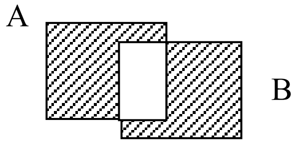
Универсальным называется множество U, состоящее из всех возможных элементов, обладающих данным признаком.

Равными называют множества A и B, состоящие из одинаковых элементов.

Число элементов множества A называется его мощностью и обозначается n (A) или |A|.

Основные операции над множествами

Название операции	**Обозначение**	**Изображение кругами Эйлера**	**Определение**	**Символическая запись**
Пересечение множеств	$A \cap B$	A 	Те и только те элементы, которые принадлежат **одновременно** и A и B	$A \cap B = \{x \mid x \in A и\ x \in B\}$

Объединение множеств	$A \cup B$		Те и только те элементы, которые принадлежат **хотя бы одному** из множествA и B	$A \cup B = \{x \mid x \in A \, или \; x \in B\}$
Разность множеств	$A \setminus B$		Те и только те элементы множества A, которые **не** принадлежат множеству B	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \, и \; x \notin B\}$
Дополнение к множеству A	$\overline{A} = A' = $ $= U \setminus A$		Те и только те элементы, которые **не** принадлежат множеству A (т.е. дополняют его до универсального U)	$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A$
Симметрическая разность	$A \Delta B$		Те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств: A либо B, но не являются общими элементами	$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$ $= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Кортежи. Декартово произведение

Картежем длины n из элементов множества A называется упорядоченная последовательность элементов этого множества, причём на первом месте стоит прообраз единицы.

Два картежа называются равными, если они имеют одинаковую длину и их элементы с одинаковыми номерами совпадают.

Пусть A – конечное множество, элементами которого являются некоторые символы, цмфры, буквы. Такое множество называют алфавитом над заданным множеством символов. Алфавит есть картеж попарно различимых символов, которые называют буквами алфавита. Элементы множества называются словами длины n в алфавите A. Слово над алфавитом есть просто некоторая конечная последовательность символов.

Рассмотрим множество B, состоящее из двух элементов: 1 и 0. Картежи длины M из этих элементов обозначим B в степени м, тогда n(B в степени м) равна 2 в степени м. Такие картежи являются упорядоченными наборами или векторами.

Каждый такой n-мерный вектор единственным образом определяет вершину куба, построенного на единичных векторах.

Картеж из нулей и единиц используется для кодировки геометрических изображений, штрих коды для сообщения определённой информации.

Декартовым произведением множеств называется множество, состоящее из всех картежей длины K, в которых ак принадлежит Aк, где 1<к<n.

Если множества A и B конечны, то их декартово произведение можно представить в общем виде таблицей из n столбцов и к строк.

Число элементов в декартовом произведении конечных множеств A и B равно произведению элементов A на число элементов B.

Если A1=A2=….=An=A, то записывают A в степени n=A $\underbrace{x\ A\ x\ldots A}_{n}$

n-ая декартовая степень множества A.

Примерами декартовых произведений являются таблица сложения, умножения и всевозможные наборы пар координат на плоскости.

Бинарное отношение – соответствие между равными множествами А и В называется отношением на данном множестве А.

Отношения в некоторых числовых множествах могут выражаться терминами «быть равным», «быть больше», «быть делителем» и т. д.

Отношение во множестве линий на плоскости могут выражаться терминами «быть параллельными», «быть перпендикулярными», «пересекаться».

Подмножества Rс М в степени n называется n-местным отношением на непустом множестве М.

При n=2 отношение R называется бинарным.

Бинарным отношением между элементами множеств А и В называют любое подмножество

Rс А х В

Свойства бинарных отношений:

1. Рефлективность aRa («быть не больше»)
2. Антирефлективность («быть больше»)
3. Симметричность (aRв, то вRa)
4. Антисимметричность («быть больше»)
5. Транзитивность aRв, вRc, то aRc
6. Антитранзитивность
7. Ассимметричность (не выполняется одновременно aRв и вRa)
8. Связность (если а не = в, то либо aRв, либо вRa)

Ходработы

Задание 1. Укажите множество действительных чисел, соответствующее записи

Вариант 1. $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

Вариант 2. $B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 > 0\}$

Вариант 3. $A = \{x \mid x^2 - 3x < 0\}$

Вариант 4. $C = \{x \mid -6 < x \le 2, x \in Z\}$

Вариант 5. $D = \{x \mid -6 < x \le 2, x \in N\}$

Вариант 6. $F = \{x \mid x^2 - 3x + 2 \le 0\}$

Задание 2. Даны отрезки $A = [-4;5]$, $B = (2;6]$, $C = (5;10]$. **Найдите следующие множества и изобразите их кругами Эйлера**

Вариант 1. $(A \cup C) \setminus (A \cap B)$

Вариант 2. $(C \cup B) \setminus (A \cap B)$

Вариант 3. $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Вариант 4. $A \cap B$

Вариант 5. $(A \cap B) \cup C$

Вариант 6. $(A \cup B) \cup C$

Задание 3. Выполните действия и определите мощность полученного множества

Вариант 1. $A = \{5,7,9\} \cup \{12,15\}$, $B = \{5,7,9\} \cap \{12,15\}$

Вариант 2. $A = \{5,7,9\} \cap \{5,57,59\}$, $B = \{5,7,9\} \cup \{5,57,59\}$

Вариант 3. $A = \{x \mid x - \textit{звонкий согласный звук}\}$,

$B = \{x \mid x - \textit{глухой согласный звук}\}$. Найдите $A \cup B$ и $A \cap B$

Вариант 4. $\{1,2,3\} \setminus \{2,3\}$, $\{1,2,3\} \setminus \{4,5\}$

Вариант 5. $A = \{15,7,9\} \cup \{2,15\}$, $B = \{15,7,9\} \cap \{2,15\}$

Вариант 6. $A = \{5,7,9\}, B = \{5,57,59\}, C = \{9,57\}$.Найдите $(A \cup B) \cap C$

Задание 4. В результате социологического опроса студентов программирования о занятиях в свободное от уроков время выяснилось, что из 100 человек:

18 – любят только читать книги;

24 – читают книги, но не ходят в театр;

7 – читают книги и посещают театр;

28 читают книги;

47 – ходят на дискотеки;

9 – посещают театр и дискотеки;

13 – лежат на диване перед телевизором, занимаются только просмотром всех возможных каналов телевидения.

Вариант 1. Сколько студентов читают книги, посещают театр, но не дискотеки?
Вариант 2. Сколько студентов посещают либо дискотеки, либо театр?
Вариант 3. Сколько студентов, посещая дискотеки и театр, не любят читать книги?
Вариант 4. Сколько студентов предпочитают только дискотеки?
Вариант 5. Сколько студентов посещают либо дискотеки, либо театр, либо читают книги?
Вариант 6. Сколько студентов любят ходить в театр?

Задание 5. Даны множества $A = \{1,2,3\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{a, б, в\}$. Запишите декартовы произведения множеств

Вариант 1. $A \times B$
Вариант 2. $B \times A$
Вариант 3. $B \times C$
Вариант 4. $C \times B$
Вариант 5. $A \times C$
Вариант 6. $C \times A$

Задание 6. Постройте множество A^2, если:

Вариант 1. A = {0, 1};
Вариант 2. A = {0, 2, 4, 6, 8};
Вариант 3. A = {день, ночь};
Вариант 4. A = {x, y, z};
Вариант 5. A = {1, 3, 5, 7};
Вариант 6.A = {a, b, c, d}.

Контрольныевопросы

1.Понятие множества, элемента множества, подмножества.
2.Способы обозначения и задания множества.
3.Понятие равных множеств, пустого множества.
4.Пересечение множеств. Непересекающиеся множества.
5.Сумма (объединение) множеств.
6.Разность множеств.
7.Прямое произведение множеств.

Содержаниеотчета.

1. Решить задание № 1-6, записать ответ.
2. Устно ответить на контрольные вопросы

Практическаяработа№4

Тема.Нахождениеобластиопределенияи истинности предиката

Цель:научиться ориентироваться в кванторах и выполнять над ними операции

.

Студентдолжензнать:

- понятия *предикат, область определения* и *область истинности предиката*;
- операции над предикатами (обычные логические и кванторные);
- понятия *предикатная формула, свободная переменная* и *связанная переменная*;
- методику построения отрицаний к предикатам, содержащим кванторные операции;
- понятия *следование одного предиката из другого* и *равносильность предикатов*;

Студентдолженуметь:

- записывать область истинности:
  а) для элементарных предикатов от одной переменной;
  б) для элементарных предикатов от нескольких переменных;
  в) для предикатов, составленных из элементарных с помощью логический операций;
- выделять в предикатной формуле свободные переменные и связанные переменные;

Теоретическоеобоснование

Существуют такие виды логических рассуждений, которые не могут быть обоснованы в рамках исчисления высказываний.

Например:

- «Всякий друг Мартина есть друг Джона. Питер не есть друг Джона. Следовательно, Питер не есть друг Мартина»;
- «Все люди мыслят. Сократ – человек. Следовательно, Сократ мыслит».

Корректность этих умозаключений основывается не только на истинностно-функциональных отношениях между входящими в них предложениями, но и на внутренней структуре самих предложений, а также на понимании таких выражений, как «все», «всякий» и т.д.

Логика предикатов – это расширение возможностей логики высказываний, позволяющее строить высказывания с учетом свойств изучаемых объектов или отношений между ними.

Одноместным предикатом $P(x)$ называется функция переменного x, определенная на множестве M и принимающая значения из множества $\{1, 0\}$.

Множество M, на котором определен предикат $P(x)$, называется ***предметной областью*** или областью определения предиката. Множество всех $x \in M$, при которых $P(x)=1$, называется ***множеством истинности*** предиката.

Многоместным предикатом называется всякая функция n переменных $Q(x_1, x_{2,} ....., x_n)$, определенная на множестве $M = M_1 \times M_2 \times ..... \times M_n$ (декартово произведение) и принимающая на этом множестве одно из двух значений $\{1, 0\}$.

В общем случае n-местным предикатом $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция, аргументы которой являются элементами произвольного множества M, а значения принадлежат множеству $\{1, 0\}$, или. $P(x_1, x_2, \ldots, x_n): M^n \to \{1, 0\}$. Элементы множества М называются ***предметными переменными***. Количество предметных переменных есть порядок (местность) предиката.

Чтобы сделать более прозрачной структуру сложных высказываний, удобно ввести специальные обозначения для некоторых часто встречающихся выражений - ***кванторы***. Для их обозначения используются символы:

$\forall$ - квантор всеобщности;

$\exists$ - квантор существования.

Пусть $P(x)$ – одноместный предикат, определенный на множестве М. Тогда под выражением $\forall x P(x)$ будем понимать высказывание, которое принимает значение истина тогда и только тогда, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента x множества M. Это высказывание уже не зависит от x. Переменную x в предикате $P(x)$ называют ***свободной***, а в высказывании $\forall xP(x)$ – ***связанной*** квантором всеобщности.

Аналогично, под выражением $\exists xP(x)$ понимают высказывание, которое является истинным, если найдется хотя бы один элемент x множества M, для которого $P(x)$ истинно, и ложным, если ни одного такого элемента во множестве М нет. Высказывание $\exists xP(x)$ не зависит от x, в нем переменная x связана квантором существования.

Из предикатных символов с помощью знаков логических операций и кванторов строятся формулы логики предикатов, которые используются в информационных задачах для описания предметной области. При этом определяется содержание множества предметных переменных M , а каждому предикатному символу придается смысл – задается свойство, которое описывает этот предикат. Таким образом, формулам придается некоторая интерпретация. Одна и та же формула в разных интерпретациях может иметь разные значения.

Если формула F истинна при любых значениях своих аргументов в некоторой интерпретации, то она называется истинной в данной интерпретации. Формула, истинная в любой интерпретации, называется общезначимой. Две формулы логики предикатов называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые истинностные значения при любых значениях переменной в любой интерпретации. Все равносильности логики высказываний (табл. 3 п.3.1.2) справедливы в логике предикатов. Кроме этого, в логике предикатов есть равносильности, связанные с преобразованиями формул, содержащих кванторы (табл. 4).

Таблица 4. Основные равносильности логики предикатов

№	Формула
1	$\neg(\exists xP(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$
2	$\neg(\forall xP(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$
3	$(\forall xP(x))\,\&\,(\forall xQ(x)) \equiv \forall x(P(x)\,\&\,Q(x))$
4	$(\exists xP(x)) \vee (\exists xQ(x)) \equiv \exists x(P(x) \vee Q(x))$
5	$(\forall xP(x)) \vee (\forall xQ(x)) \equiv \forall x\forall y(P(x) \vee Q(y))$
6	$(\exists xP(x))\,\&\,(\exists xQ(x)) \equiv \exists x\exists y(P(x)\,\&\,Q(y))$

Специальную форму записи формулы логики предикатов называют предваренной нормальной формой (ПНФ).

Алгоритм получения формулы ***в предваренной нормальной форме***:

1) перейти от символов $\to$ и ~ к символам &, $\vee$, $\neg$;
2) внести все отрицания внутрь формулы, “приклеив” их к предикатным символам;
3) вынести все кванторы в начало формулы.

Пример 1:

Является ли формула логики предикатов $\forall xP(x) \to \exists xP(x)$ тождественно истинной?

Решение:

Используем закон замены импликации:

$\forall xP(x) \to \exists xP(x) \equiv \neg(\forall xP(x)) \vee \exists xP(x).$

Применим закон де Моргана и закон равносильностей логики предикатов (табл. 4):

$$\neg(\forall xP(x)) \vee \exists xP(x) \equiv \exists x(\neg P(x)) \vee \exists xP(x) \equiv \exists x(\neg P(x)) \vee P(x)) \equiv 1.$$

Данная формула является тождественно истинной.

Пример 2:

Записать формулу логики предикатов $F = \neg(\exists x(P(x) \to \forall yP(y)))$ в ПНФ.

Решение:

В преобразованиях будем использовать законы логики высказываний (табл. 3) и логики предикатов (табл. 4).

$F \equiv \neg(\exists x(P(x) \to \forall yQ(y))) \equiv \forall x(\neg(\neg P(x) \vee \forall yQ(y))) \equiv$

$\equiv \forall x(P(x)\,\&\,\neg(\forall yQ(y))) \equiv \forall x(P(x)\,\&\,(\exists y\neg Q(y))) \equiv \forall x\exists y(P(x)\,\&\,\neg Q(y)).$

Ходработы

1. Даны утверждения

$\text{A}(n) = \{\text{число } n \text{ делится на } 3\}$;

$\text{B}(n) = \{\text{число } n \text{ делится на } 2\}$;

$\text{C}(n) = \{\text{число } n \text{ делится на } 4\}$

$\text{D}(n) = \{\text{число } n \text{ делится на } 6\}$;

$\text{E}(n) = \{\text{число } n \text{ делится на } 12\}$

Будет ли истинна формула логики предикатов $\exists n(B(n)\,\&\,C(n) \to \neg D(n))$?

2. Найти области истинности предикатов

1) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} = 0;$

2) $\begin{cases} x^2 - 13x + 40 \ge 0, \\ 2x^2 + x + 30 < 0. \end{cases}$

3. Установить, какие из следующих предикатов истинны, а какие ложны, при условии, что область определения предикатов M совпадает с Z:

1) $\forall x((x^2 - 6x + 8 \ge 0) \vee (x^2 - 6x + 8 < 0));$

2) $\exists x(x^2 + x + 0{,}5 = 0).$

4. Изобразить на диаграммах Эйлера-Венна области истинности предикатов

1) $P(x) \to Q(x);$

2) $P(x) \to \overline{Q(x)};$

3) $\overline{P(x)} \leftrightarrow \overline{Q(x)};$

4) $(P(x) \vee Q(x))\,\&\,R(x).$

5)

5. Проверить, являются ли формулы логики предикатов равносильными:

1) $F_1 = \forall x\overline{Q(x)} \to (\exists x P(x)\,\&\,\exists x Q(x));\quad F_2 = \exists x Q(x);$

2) $F_1 = \exists x P(x) \vee (\exists x P(x)\,\&\,\exists x\overline{Q(x)});\quad F_2 = \exists x P(x);$

6. Доказать, что формула является тождественно истинной:

$F = \forall x P(x) \to \exists x P(x).$

7. Доказать, что формула является тождественно ложной:

$F = \exists x \exists y((F(x) \to F(y))\,\&\,(F(x) \to \overline{F(y)})\,\&\,F(x))$.

8. Привести формулы к предваренной нормальной форме:

1) $\overline{\exists x(P(x) \to \forall y Q(y))};$

2) $\overline{P \to \exists x R(x)};$

Контрольныевопросы

1. Приведите примеры одноместных предикатов.
2. Дайте определение n-местного предиката.
3. Что такое предметные переменные?
4. Что такое порядок (местность) предиката?
5. Что такое множество истинности предиката?
6. Как привести формулу логики предикатов к предваренной

Содержаниеотчета.

1.Решитьзадание№1-8, записатьегоответ.

2.Устноответитьнаконтрольныевопросы.

Практическая работа№ 5

Тема.Исследование отображений и свойств бинарных отношений с помощью графов.
Цель: формирование у студентов умений строить графы, указывать элементы графа, строить таблицы инцидентности и смежности

Студент должен знать:

- понятие функции нескольких переменных и ее области определения;
- понятие предела функции нескольких переменных;
- определение частных производных и дифференциала функции нескольких переменных;

Студент должен уметь:

- находить значения функции нескольких переменных,
- находить область определения функции нескольких переменных;
- вычислять частные производные и дифференциалы.

Теоретическое обоснование

Основные понятия.

1 Любой орграф G(V, E) без кратных дуг задает бинарное отношение E на множестве V, и обратно, пара элементов принадлежит отношению $(v_i , v_j) \in E \subseteq V \times V$ тогда и только тогда, когда в графе G есть дуга (v_i , v_j)

2 Граф, соответствующий рефлексивному отношению, в каждой вершине имеет петлю. Граф, соответствующий антирефлексивному отношению, не имеет петель. Графы отношений, которые не являются ни рефлексивными, ни антирефлексивными, имеют вершины с петлями и вершины без петель одновременно.

3 Если в графе симметричного отношения есть дуга (x, y), то должна быть и дуга (y, x).

4 Если граф транзитивного отношения содержит дуги (x, y) и (y, z), то он должен содержать дугу (x, z).

Пример 1

Исходные данные: На множестве A = {9, 10, 11, 12} задано бинарное отношение R = {(a,b)| a–b<1} Необходимо изобразить орграф, соответствующий отношению R и определить свойства этого отношения.

Решение:

1 Найдем декартов квадрат A = A×A = {(9, 9), (9, 10), (9, 11), (9, 12), (10,9), (10, 10), (10, 11), (10, 12), (11, 9), (11, 10), (11, 11), (11, 12), (12, 9), (12, 10), (12, 11), (12, 12)}.

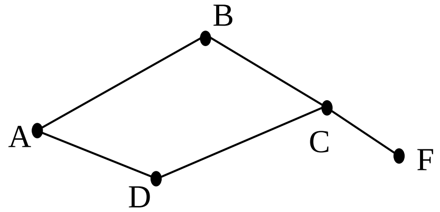
2 Укажем элементы отношения R = {(9, 9), (9, 10), (9, 11), (9, 12), (10,10), (10, 11), (10, 12), (11, 11), (11, 12), (12, 12)}.

3 Множество A содержит четыре элемента, значит орграф отношения R имеет четыре вершины. В соответствии с элементами множества R строим дуги графа:

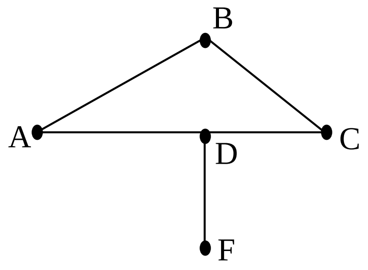
Ходработы

<u>Задание 1.</u> Постройте изоморфизм графов

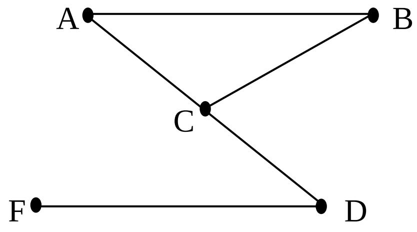
Вариант 1.



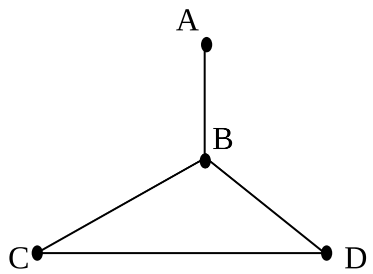
Вариант 2.



Вариант 3.



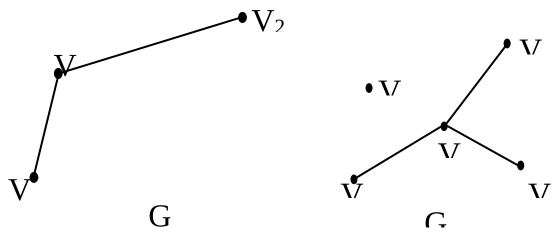
Вариант 4.



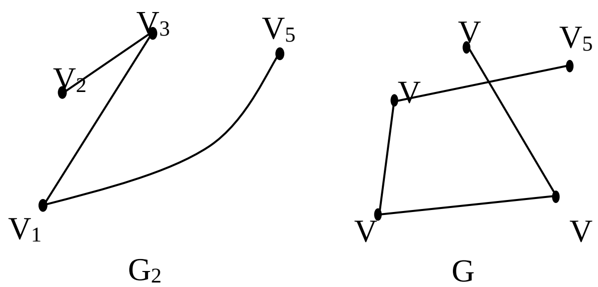
<u>**Задание 2.**</u> **Приведите пример эйлерова графа, гамильтонова цикла. Постройте эти циклы.**

<u>**Задание 3.**</u> **Найдите объединение и пересечение графов G_1 и G_2, дополнение до графа G_1.**

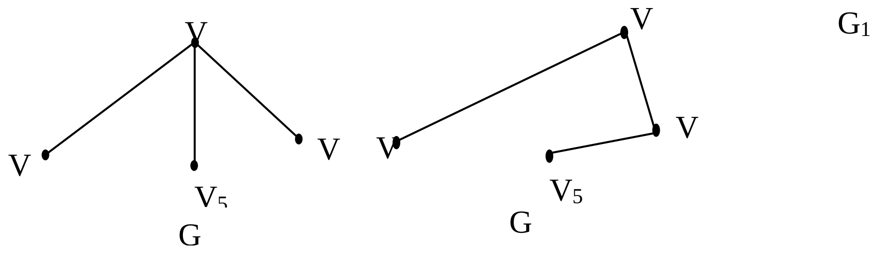
Вариант 1.



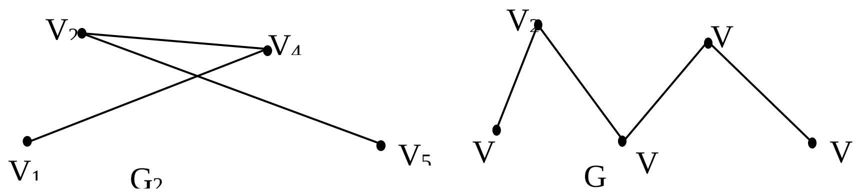
Вариант 2.



Вариант 3.



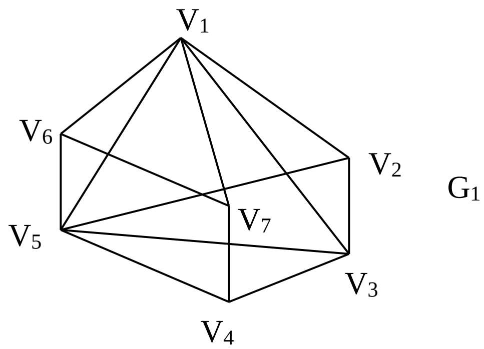
Вариант 4.



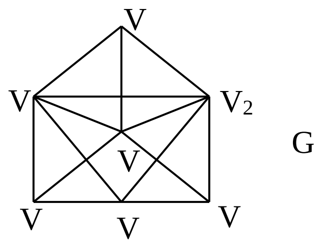
<u>Задание 4.</u> Граф G задан диаграммой

1) **составьте для него матрицу смежности;**
2) **постройте матрицу инцидентности;**
3) **укажите степени вершин графа;**
4) **найдите длину пути из вершины V_2 в вершину V_5, составьте маршруты длины 5, цепь, соединяющую вершины V_2 и V_5;**
5) **постройте цикл, содержащий вершину V_4.**

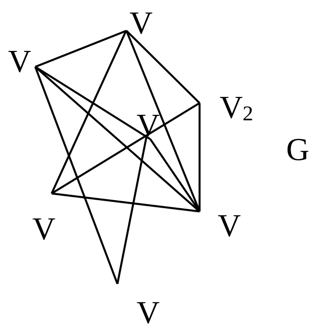
Вариант 1.



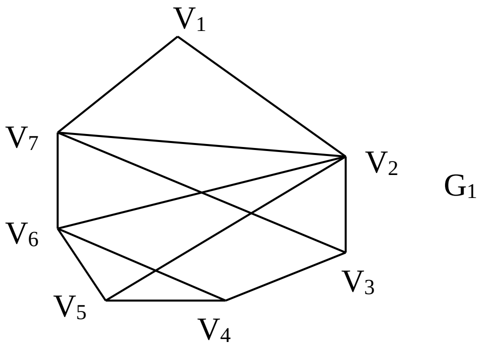
Вариант 2



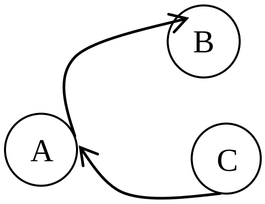
Вариант 3.



Вариант 4.



<u>Задание 5.</u> Постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности для отношений, заданных графом G. Найдите число степеней входа и выхода этого графа



<u>Задание 6.</u> Орграф задан матрицей смежности. Постройте его рисунок (схему, диаграмму), определите степени вершин графа и найдите маршрут длины 5.

$$\text{Вариант 1.}\ G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вариант 2.}\ G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Вариант 3.}\ G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 4. $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Задание 7. Ориентированный граф G(V,X) с множеством вершин V={1;2;3;4;5;6;7} задан списком дуг X

1) **постройте реализацию графа G;**
2) **постройте матрицу инцидентности графа G;**
3) **постройте матрицу смежности**

*Вариант 1.*X={(1;4); (2;1); (4;3); (4;5); (2;6); (2;6); (7;1); (7;6); (3;2); (5;4); (3;4); (2;2); (6;2); (5;5)}

Вариант 2. X={(1;5); (2;3); (2;3); (4;5); (4;6); (5;6); (5;1); (6;6); (3;2); (5;4); (6;4); (7;2); (6;7); (7;5)}

*Вариант 3.*X={(1;1); (2;2); (2;3); (3;5); (4;6); (4;6); (5;1); (5;6); (5;2); (6;4); (7;4); (7;2); (7;2); (7;5)}

Вариант 4. X={(1;1); (1;3); (1;3); (2;5); (2;6); (3;6); (3;1); (3;6); (3;7); (4;4); (4;6); (5;2); (6;3); (6;5)}

Контрольныевопросы:

1 Как с помощью графа изобразить бинарное отношение?
2 Граф рефлексивного отношения
3 Граф антирефлексивного отношения
4 Как в графе отображается нерефлексивное отношение?
5 Как по графу определить симметричное, антисимметричное и несимметричное отношение
6 Граф транзитивного отношения

Содержание отчета.

1. Решить задание № 1-7, записать его ответ.
3. Устно ответить на контрольные вопросы.

Практическая работа№ 6

Тема.Работа машины Тьюринга.

Цель: приобретение навыков вычисления двойного интеграла

Понятие алгоритма. Вычислимые, частично рекурсивные и общерекурсивные функции. Примитивная рекурсия.. Вычисление функций на машине Тьюринга-Поста.. Универсальная машина Тьюринга-Поста. Эффективные алгоритмы. Алгоритмически неразрешимые проблемы. Некоторые алгоритмические массовые проблемы. Нумерация Геделя. Самоприменимые программы. Проблема останова

Студент должен знать:

- понятие алгоритма,
- операция минимизации,
- тезис Тьюринга

Студент должен уметь:

- вычислять частично рекурсивные и общерекурсивные функции,
- вычислять функции на машине Тьюринга-Поста

Теоретическое обоснование

Рассмотрим другую алгоритмическую модель, представляющую собой идеализированную ЭВМ и предложенную в 70-х годах с целью моделирования реальных вычислительных машин и анализа сложности вычислений. В результате попыток разложить интуитивно известные нам вычислительные процедуры на элементарные операции построена математическая модель, называемая ***машиной Тьюринга***. Повторение элементарных операций, определенных в этой машине, достаточно для проведения любого возможного вычисления.

Машина Тьюринга включает:

1. Внешний алфавит $A=\{a_0,a_1,...,a_n\}$, т.е. конечное множество символов. В этом алфавите (в символах этого алфавита) информация вводится в машину. Машина преобразует введенную информацию в новую.
2. Внутренний алфавит $Q=\{q_0,q_1,...,q_m,R,\ L,\ C,\ P,\ E\}$. Символы $q_0,q_1,...,q_m$ выражают конечное число состояний машины, причем q_1– начальное состояние, q_0– стоп-состояние.
3. Бесконечную в обе стороны ленту, представляющую память машины. Эта память разбита на клетки. В каждую клетку может быть записана только одна буква. Где a_0– пустая клетка, она всегда может появиться при движении вправо или влево, если закончится слово информации $a_0a_1a_2...a_n$.
4. Считывающее устройство. Оно передвигается вдоль ленты и может останавливаться напротив какой-либо клетки и воспринимать записанный там символ исходного слова. В одном такте работы машины считывающее устройство может сдвигаться на одну клетку или оставаться на месте.

Работа машины складывается из тактов, по ходу которых происходит преобразование начальной информации в промежуточную. В качестве начальной информации на ленту можно подать любую конечную систему знаков внешнего алфавита, расставленного произвольным образом по ячейкам. При этом работа машины Тьюринга может заканчиваться так:

- После конечного числа тактов машина останавливается в q_0 состоянии. При этом на ленте оказывается преобразованная информация. В этом случае говорят, что машина применима к начальной информации I_1 и преобразует ее в результирующую информацию I_2;
- Машина никогда не останавливается (не переходит в q_0 состояние). В этом случае машина не применима к начальной информации I_1.

В каждом такте работы машина Тьюринга действует по единой ***функциональной схеме***:

$$a_i q_j \Rightarrow a_l \begin{Bmatrix} R \\ L \\ C \\ P \\ E \end{Bmatrix} q_s,$$

где $a_i, a_l \in A,\ q_j, q_s \in Q$ и a_i – буква на ленте, обозреваемая считывающим устройством на данном такте, q_j – текущее состояние машины на данном такте.

На каждом такте функциональной схемой вырабатывается команда, состоящая из трех элементов (правая часть формулы):

1. Буква внешнего алфавита a_l, на которую заменяется обозреваемая буква a_i.
2. Адрес внешней памяти и дополнительные действия для выполнения на следующем такте R, L, C, P или E.
3. Следующее состояние машины.

Формирование правой части функциональной схемы происходит по командам, совокупность которых образует программу машины Тьюринга. Программа представляется в виде двумерной таблицы (табл. 5), называемой ***тьюринговой функциональной схемой***, в каждой клетке которой записываются отдельные команды. Работа машины Тьюринга полностью определяется ее программой.

Таблица 5. Функциональная схема Тьюринга

Состояния	Символы внешнего алфавита			
	a_0	a_1	$\ldots$	a_n
q_1	a_2Lq_3	a_1Rq_2	$\ldots$	a_2Lq_1
q_2	a_1Cq_0	a_2Cq_1	$\ldots$	a_1Cq_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
q_m	a_1Pq_3	a_0Rq_{m-1}	$\ldots$	$a_{n-1}Rq_1$

Говорят, что непустое слово α в алфавите A воспринимается машиной в стандартном положении, если оно записано в последовательных клетках ленты, все другие клетки пусты, и машина обозревает крайнюю клетку справа из тех, в которых записано слово α.

Если данное состояние описывается машинным словом M, то машинное слово, описывающее следующее состояние машины, будет обозначаться через $M^{(1)}$. Далее аналогично $M^{(i+1)} = (M^{(i)})^{(1)}$, $i = 0,1,2,\ldots$. Переход машины Тьюринга из начального в последующие состояния изображается в виде цепочки слов $M \vdash M^{(1)} \vdash M^{(2)} \vdash \ldots$

Чтобы описывать работу машины Тьюринга более удобным образом, текущее состояние машины пишут не внизу алфавита, а перед обозреваемой ячейкой. Например, пусть $A = \{0,1\}, Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, q_0 - символ остановки. Начальная информация: $q_1 11$. Тогда программа строится следующим образом:

$q_1 0 \to q_2 R,\ q_2 0 \to q_0 1,\ q_1 1 \to q_1 R,\ q_2 1 \to q_2 R.$

Если первое направление уточняет понятие алгоритма через класс рекурсивных функций, то второе, связанное с машинной арифметикой, сначала уточняет понятие алгоритма, а затем определяет класс вычислимых функций. Основная идея этого направления заключается в том, что алгоритмические процессы – это процессы, которые могут имитироваться на специально построенных машинах, которые описываются в точных математических терминах. В результате оказывается, что сложные процессы можно моделировать на простых устройствах. Всякий алгоритм может быть задан некоторой функциональной схемой и реализован в соответствующей машине Тьюринга. Эта гипотеза называется ***тезисом Тьюринга***.

Пример 1:

Пусть $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_3, q_4\ R,\ L,\ C\}$ и машина Тьюринга управляется функциональной схемой:

Состояния	Символы внешнего алфавита		
	a_0	a_1	a_2
q_1	a_2Lq_3	a_1Rq_2	a_2Lq_1
q_2	a_1Cq_0	a_2Cq_1	a_1Cq_2
q_3	a_0Rq_0	a_1Rq_4	a_2Cq_1
q_4	a_1Cq_3	a_0Rq_4	a_2Rq_4

Определить конечный результат работы машины, если начальная конфигурация имеет вид:

а) $a_0a_1\underset{q_1}{a_2}a_2a_0$;   б) $a_0\underset{q_1}{a_1}a_0$.

Решение:

а) Рассмотрим работу машины пошагово:

1. Считывающим устройством обозревается буква a_2 (слово считывается слева направо, a_0 – пустая клетка), а машина находится в состоянии q_1: $a_0\underset{q_1}{a_1}a_2\underset{\Uparrow}{a_2}a_0$. При этом вырабатывается команда a_2Lq_1, т.е. считывающее устройство сдвигается влево, a_2 заменяется на a_2, состояние q_1 меняется на q_1, получаем конфигурацию $a_0a_1\underset{q_1\Uparrow}{a_2}a_2a_0$.
2. Следующая конфигурация, по аналогии, будет: $a_0\underset{\Uparrow}{a_1}\underset{q_1}{a_2}a_2a_0$ (считывающее устройство сдвинулось влево). Теперь обозревается буква a_1, машина находится в состоянии q_1, т.е. вырабатывается команда a_1Rq_2 – считывающее устройство сдвигается вправо, a_1 заменяем на a_1, состояние q_1 меняется на q_2, получаем конфигурацию $a_0a_1\underset{q_2\Uparrow}{a_2}a_2a_0$.
3. Обозревается буква a_2, машина находится в состоянии q_2, т.е. вырабатывается команда a_1Cq_2 – считывающее устройство стоит на месте, a_2 заменяется на a_1, состояние q_2 меняется на q_2, получаем конфигурацию $a_0a_1\underset{q_2\Uparrow}{a_1}a_2a_0$.
4. Обозревается буква a_1, машина находится в состоянии q_2, т.е. вырабатывается команда a_2Cq_1 – считывающее устройство стоит на месте, a_1 заменяется на a_1, состояние q_2 меняется на q_1, получаем конфигурацию $a_0a_1\underset{q_1\Uparrow}{a_2}a_2a_0$.

Таким образом, мы пришли в начальное состояние. Процесс работы машины повторяется, и, следовательно, конечный результат не может быть получен. Данная машина Тьюринга не применима к исходной информации.

б) Пусть начальная информация имеет вид $a_0\underset{q_1}{a_1}a_0$. Тогда, действуя аналогично, придем к следующим конфигурациям:

1. $a_0\underset{q_1\Uparrow}{a_1}a_0$ обозревается буква a_1, машина находится в состоянии q_1, вырабатывается команда a_1Rq_2 – считывающее устройство сдвигается вправо, a_1 заменяется на a_1, состояние q_1 меняется на q_2, получаем конфигурацию $a_0\underset{q_2}{a_1}\underset{\Uparrow}{a_0}$.
2. Обозревается буква a_0, машина находится в состоянии q_2, вырабатывается команда a_1Cq_0 – считывающее устройство стоит на месте, a_0 заменяется на a_1, состояние q_2 меняется на q_0,

получаем конфигурацию $\underset{q_0\Uparrow}{a_0 a_1 a_1 a_0}$. Мы пришли в стоп состояние q_0, следовательно, слово $a_1 a_1$ – результат ее работы, и машина применима к исходной информации.

Пример 2:

Пусть $A=\{0,1\},\ Q=\{q_0,q_1,q_2\},\ q_0$ - символ остановки,. Программа строится следующим образом: $q_1 0\to q_2 R,\ q_2 0\to q_0 1,\ q_1 1\to q_1 R,\ q_2 1\to q_2 R.$ Определить конечный результат работы машины, если начальная конфигурация имеет вид:

а) $q_1 11$; б) $q_2 101$.

Решение:

а) $q_1 11 \vdash 1q_1 1 \vdash 11q_1 0 \vdash 110q_2 0 \vdash 110q_0 1$,

где 0 – символ пустой ячейки ленты машины.

б) $q_2 101 \vdash 1q_2 01 \vdash 1q_0 11$.

Ход работы

1. Пусть $A=\{a_0,a_1,a_2,a_3\}$, $Q=\{q_0,q_1,q_3,q_4\ R,\ L,\ C\}$ и машина Тьюринга управляется функциональной схемой:

Состояния	Символы внешнего алфавита			
	a_0	a_1	a_2	a_3
q_1	a_2Lq_3	a_1Rq_2	a_3Lq_1	a_2Cq_1
q_2	a_3Cq_0	a_2Cq_1	a_1Cq_2	a_2Rq_0
q_3	a_0Rq_0	a_1Rq_0	a_2Cq_1	a_1Cq_3
q_4	a_1Cq_3	a_0Rq_4	a_3Rq_4	a_3Lq_3

Определить конечный результат работы машины, если начальная конфигурация имеет вид:

$a_0 a_1 \underset{q_1}{a_2} a_3 a_0$

$a_0 \underset{q_2}{a_2} a_0$

$a_0 a_3 \underset{q_3}{a_1} a_2 a_0$

$a_0 \underset{q_4}{a_3} a_2 a_0$

$a_0 \underset{q_3}{a_3} a_0\ \ a_0 \underset{q_1}{a_1} a_1 a_0$;

2. Построить машину Тьюринга для вычисления функции «левый сдвиг»: $01^x q_1 0 \Rightarrow q_0 01^x 0$.

3. Построить машину Тьюринга для вычисления функции «правый сдвиг»: $q_0 01^x 0 \Rightarrow 01^x q_0 0$.

Контрольные вопросы:

1. Существует точное формальное определение алгоритма?
2. Дайте определение класса рекурсивных функций.
3. Что включает в себя машина Тьюринга?
4. Какие существуют варианты завершения работы машины Тьюринга?

Содержание отчета.

1. Решить задание № 1-3 и записать его ответ.
2. Решить задание № 2 и записать его ответ.
3. Устно ответить на контрольные вопросы.

Список литературы

1.Канцедал, С. А. Дискретная математика : учебное пособие / С.А. Канцедал. — Москва : ИД «ФОРУМ» : ИНФРА-М, 2019. — 222 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-16-104039-3. - URL: https://znanium.com/catalog/product/978416 (дата обращения: 27.01.2021). – Текст : электронный.

1.Скорубский, В. И. Математическая логика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. И. Скорубский, В. И. Поляков, А. Г. Зыков. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 211 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-11631-1. — URL: https://urait.ru/bcode/476344 (дата обращения: 27.01.2021). - Текст : электронный.
-

1.Судоплатов, С. В. Дискретная математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — 5-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 279 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-11632-8. — URL: https://urait.ru/bcode/476343 (дата обращения: 27.01.2021). - Текст : электронный.