МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Югорский государственный университет» (ЮГУ)

ЛЯНТОРСКИЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИКУМ
(филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Югорский государственный университет»
(ЛНТ (филиал) ФГБОУ ВО «ЮГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению практических работ
по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики
специальность 09.02.07 Информационные системы и программирование

Лянтор
2021

УДК 51
М54

Рекомендовано Методическим советом ЛНТ (филиал) ФГБОУ ВО «ЮГУ» в качестве учебно-методического пособия. Протокол № 8 заседания Методического совета ЛНТ от 26.03.2021 г.

М 54 **Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине** ЕН.01 Элементы высшей математики **специальность 09.02.07 Информационные системы и программирование** : учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование/ составитель О.В. Кийдан; Министерство науки и высшего образования РФ, ЛНТ (филиал) ФГБОУ ВО «ЮГУ». – Лянтор: ЛНТ, 2021.– 57 с.

УДК 51

Содержание

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА 4
ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ. 5
ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ. 6
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1.. Исследование и построение графиков.. . . 7
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2.Вычисление интегралов. 11
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3.Вычисление производных. Вычисление производных высших порядков и дифференциалы высших порядков. . . . 16
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4.. Вычисление двойных интегралов. Вычисление повторных интегралов. 18
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5Определение числового ряда. Исследование сходимости рядов.. 23
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6 Решение дифференциальных уравнений. . . 27
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№7..Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка. 30
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№8.Выполнение операций над матрицами. Вычисление определителей. 33
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№9. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. 37
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10.. Вычисление скалярного, смешанного, векторного произведения векторов. 41
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №11Составление уравнения прямой на плоскости. Нахождение угла между прямыми и расстояние от точки до прямой 44
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №12Составление уравнения окружности, эллипса, гиперболы и параболы на плоскости 50
Список литературы. 57

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯЗАПИСКА

Методическиеуказанияповыполнениюпрактическихработпредназначеныдляупорядочения работыобучающихся,разработанынаосновеФедеральногогосударственногообразовательногостандартасреднегопрофессиональногообразованияпоспециальности09.02.07Информационныесистемыипрограммирование.

СтруктураметодическихуказанийопределенапоследовательностьюизучениядисциплиныЭлементы высшей математики,котораявходитвматематическийиобщийестественнонаучныйциклдисциплинспециальности.

ПрограммойдисциплиныЭлементывысшеематематикипредусмотреновыполнениепрактическихработвколичестве26часов.

Практическиезанятияслужатсвязующимзвеноммеждутеориейипрактикой.Онинеобходимыдлязакреплениятеоретическихзнаний,полученныхнаурокахтеоретическогообучения,атакжедляполученияпрактическихзнаний.Практическиезаданиявыполняютсястудентомсамостоятельно,сприменениемзнанийиумений,полученныхнауроках,атакжесиспользованиемнеобходимыхпояснений,полученныхотпреподавателяпривыполненииипрактическогозадания

Врезультатеосвоениядисциплиныобучающийсядолженуметь:

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений
- решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления
- решать дифференциальные уравнения
- пользоваться понятиями теории комплексных чисел

Врезультатеосвоениядисциплиныобучающийсядолжензнать:

Врезультатеосвоениядисциплиныобучающийсядолженобладатьобщимикомпетенциями,включающимивсебяспособность:

ОК1.Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам

ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК5.Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Номер работы	Тема	Наименование работы	Кол-во часов
1	3	Исследование и построение графиков	2
2	4	Вычисление интегралов	1
3	5	Вычисление производных. Вычисление производных высших порядков и дифференциалы высших порядков	2
4	6	Вычисление двойных интегралов. Вычисление повторных интегралов	2
5	7	Определение числового ряда. Исследование сходимости рядов	2
6	8	Решение дифференциальных уравнений	2
7		Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка	2
8	9	Выполнение операций над матрицами. Вычисление определителей	2
9	10	Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.	2
10	11	Вычисление скалярного, смешанного, векторного произведения векторов	1
11	12	Составление уравнения прямой на плоскости. Нахождение угла между прямыми и расстояние от точки до прямой	2
12		Составление уравнения окружности, эллипса, гиперболы и параболы на плоскости	2
Итого			22

ПРАВИЛАВЫПОЛНЕНИЯПРАКТИЧЕСКИХРАБОТ

Практическиеработыпроводятсявходеосуществленияучебногопроцессаинаправленыназакреплениетеоретическогоматериала.Практическиеработыоформляютсявписьменномвиде,преподавательпроверяетотчетстудентаовыполненнойпрактическойработеиделаетотметкувжурналеучебных занятий.

Ккаждомупрактическомузанятиюпреподавателямиразработаныинструкциипоихпроведению.Всодержанииинструкциикаждойпрактическойработыданыкраткиетеоретическиесведенияилиформулы,примерырешениязадач,изаданиядлясамостоятельногорешенияповариантам.Практическиеработынеобходимовыполнятьвтетрадяхсуказаниемномера,темы,целейработы.

Передвыполнениемпрактическойработыпреподавательпроверяетготовностьстудентовкеевыполнению.Преподавательконтролируетвыполнениепрактическойработывсоответствиисинструкциейпопроведению.Неподготовленныеобучающиесяквыполнениюработынедопускаются.

Изучаятеоретическоеобоснование,студентдолжензнать,чтоосновнойцельюизучениятеорииявляетсяумениеприменятьеенапрактике.

Послевыполненияработыстудентдолженпредставитьотчетопроделаннойработесполученнымирезультатамииустноеезащитить.

Приотсутствиистудентапонеуважительнойпричиневыполняетработусамостоятельнововнеаудиторноевремяизащищаетнаконсультации.

Неаккуратновыполненнаяпрактическаяработавозвращаетсядлядоработки.

Показателиоценкипрактическойработыподисциплине:

- умениеобучающегосяиспользоватьтеоретическиезнанияпривыполнениипрактическихзаданий;
- уровеньосвоенияобучающимисяучебногоматериала;
- правильностьичеткостьизложенияответа;
- оформлениематериалавсоответствиистребованиями.

Критериицениванияпрактическихработ

Отметка«5»ставиться,если:

-работавыполненаполностью;

-влогическихрассужденияхиобоснованиирешениянетпробеловиошибок;

-врешениинетматематическихошибок(возможнаоднанеточность,описка,неявляющаясяследствиемнезнанияилинепониманияучебногоматериала).

Отметка«4»ставится,если:

-выполнено75-90%заданий;

-либоработавыполненаполностью,нообоснованияшаговрешениянедостаточны;

-допущенаоднаошибкаилидва-тринедочетаввыкладках,рисунках,чертежахилиграфиках(еслиэтивидыработынеявляютсяспециальнымобъектомпроверки).

Отметка«3»ставиться,если:

-выполнено51-75%заданий;

-допущеныболееоднойошибкиилиболеедвух-трехнедочетовввыкладках,чертежахилиграфиках,нообучающийсявладеетобязательнымиумениямипопроверяемойтеме.

Отметка«2»ставится,если:

-выполненоменее50%заданий;

-допущенысущественныеошибки,показавшие,чтообучающийсяневладеетобязательнымиумениямиподаннойтемевполноймере.

Практическаяработа№1

Тема.Исследованиеипостроениеграфиков.

Цель:развиватьлогическоемышление,пространственноевоображение;исследоватьэлементарныефункцииирешатьпростейшиезадания.

Студентдолжензнать:

- всеофункциях,совершенствованиеграфическихумений;
- простейшиеопределенияисследованияфункции.

Студентдолженуметь:

- использоватьсвойствафункцийдляпостроенияграфиков.

Теоретическоеобоснование

Построениеграфикапроизвольнойфункцииможетбытькакотдельнойзадачей,такивспомогательной-
например,прирешенииуравненийграфическимспособом,илиприрешениизадачспараметрами.

Алгоритм**исследованияфункции** $y=f(x)$ **ипостроенияеграфика**таков:

1.Находим<u>областьопределения</u>(D(f))функции $y=f(x)$.

2.Находимточкипересеченияграфикасосямикоординат.

Находимнулифункции-этоточкипересеченияграфикафункции $y=f(x)$ сосьюабсцисс(OX).

Дляэтогомырешаемуравнение $f(x)=0$.

Корниэтогоуравненияявляются***абсциссамиточекпересеченияграфикафункциисосьюOX.***

Находимточкупересеченияграфикафункции $y=f(x)$
сосьюординат(OY).Дляэтогоищемзначениефункциипри $x=0$.

3.Исследуемфункциюспомощьюпроизводной:**находимпромежуткивозрастанияиубыванияфункции,атакжеточкимаксимумаиминимума.**

Дляэтогомыследуемпривычномуалгоритму.

а)Находимпроизводную $f'(x)$

в)Находимпромежуткизнакопостоянствапроизводной.Промежутки,накоторых**производнаяположительна**,являютсяпромежутками**возрастания**функции.

Промежутки,накоторых**производнаяотрицательна**,являютсяпромежутками**убывания**функции.

Точки,вкоторыхпроизводнаяменяетзнаксплюсанаминус,являютсяточкамимаксимума.

Точки,вкоторыхпроизводнаяменяетзнаксминусанаплюс,являютсяточкамиминимума.

<u>Пример2</u>Исследуемфункцию $y=\frac{x^3}{x^2-3}$ ипостроимеграфик.

1)НайдемD(y).

$x^2-3\neq 0$

$x\neq\pm\sqrt{3}$

2)Найдемточкипересечениясосямикоординат.

а)ТочкипересечениясосьюOX(y=0)

$\frac{x^3}{x^2-3}=0$

$x=0$

б)ТочкапересеченияосьюOY(x=0)

$$y=\frac{0}{0-3}=0$$

Графикнашейфункциипроходитчерезначалокоординат.

3)Найдемпромежуткивозрастания-убыванияфункции $y=\frac{x^3}{x^2-3}$ иэкстремумы.

а)Найдемпроизводнуюфункции $y=\frac{x^3}{x^2-3}$

$$y'=\left(\frac{x^3}{x^2-3}\right)'=\frac{3x^2\left(x^2-3\right)-x^3\left(2x\right)}{\left(x^2-3\right)^2}=\frac{3x^4-9x^2-2x^4}{\left(x^2-3\right)^2}=\frac{x^4-9x^2}{\left(x^2-3\right)^2}$$

б)Приравняемпроизводнуюкнулю:

$$x^4-9x^2=0$$

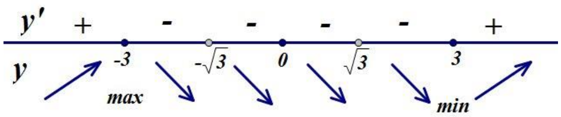
$$x^2\left(x^2-9\right)=0$$

$x=0$ (кореньчетнойкратности); $x=-3$; $x=3$

Корнизнаменателя- $x=\pm\sqrt{3}$ -такжекорничетнойкратности.

Вкорняхчетнойкратностипроизводнаязнакнеменяет.

в)Нанесемнулипроизводнойикорниеезнаменателяначисловуюось,расставимзнакиинайдемточкиэкстремумаипромежуткивозрастанияиубывания.



Итак,мынашлипромежуткивозрастанияиубывания.

Найдемзначениефункциивточкахэкстремума:

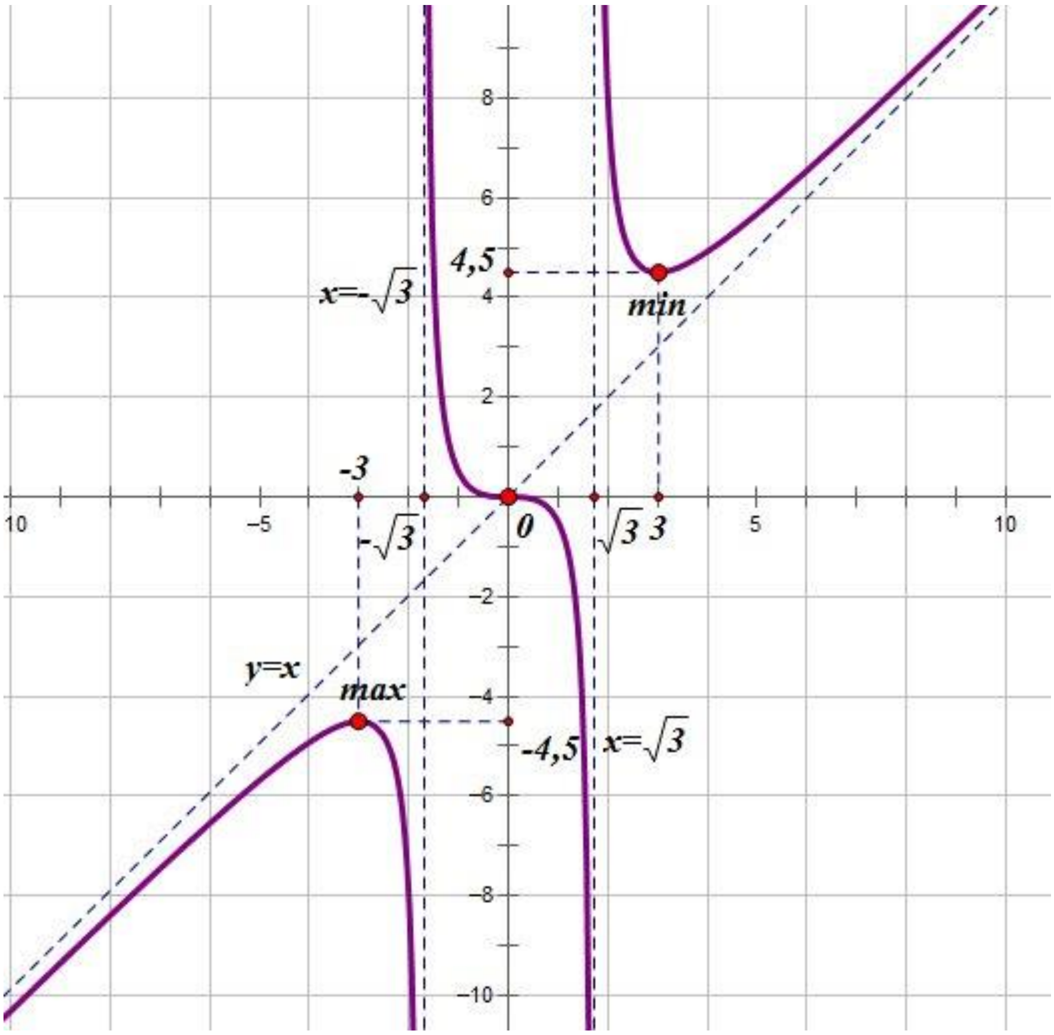
$$x_{\max}=-3$$

$$y_{\max}=y\left(-3\right)=\frac{\left(-3\right)^3}{\left(-3\right)^2-3}=\frac{-27}{6}=-4,5$$

$$x_{\min}=3$$

$$y_{\min}=y\left(3\right)=\frac{\left(3\right)^3}{\left(3\right)^2-3}=\frac{27}{6}=4,5$$

Итак,отметимвнашейкоординатнойплоскоститочкиминимумаимаксимумафункциииточкупересеченияграфикафункциисосямикоординат.



Нарисункенижебольшимикраснымикружкамиобозначеныточки,черезкоторыепроходитграфикфункции.

Ходработы

В-1	№1
В–2	№2
В–3	№3
В–4	№4
В–5	№5
В–6	№6
В–7	№7
В–8	№8
В–9	№9
В-10	№10

1. Исследоватьфункциюипостроитьеграфик: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$
2. Исследоватьфункциюипостроитьеграфик: $f(x)=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$

3. Исследоватьфункциюипостроитьееграфик: $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

4. Исследоватьфункциюипостроитьееграфик: $f(x)=\frac{1-x^3}{x^2}$

5. Исследоватьфункциюипостроитьееграфик: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x-2}$

6. Исследоватьфункциюипостроитьееграфик: $f(x)=\frac{(x+3)^2}{2x-8}$

7. Исследоватьфункциюипостроитьееграфик: $f(x)=\frac{x^2-4}{x}$

8. Исследоватьфункциюипостроитьееграфик: $f(x)=\frac{6-x^3}{x^2}$

9. Исследоватьфункциюипостроитьееграфик: $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-4}$

10. Исследоватьфункциюипостроитьееграфик: $f(x)=\frac{x^2-16}{2x-4}$

Контрольныевопросы

1.Определение производной функции
2. Определение монотонности функции
3. Определение экстремума функции

Содержаниеотчета.

1.Решитьзаданиеизаписатьегоответ.
2.Устноответитьнаконтрольныевопросы.

Практическаяработа№2

Тема.Вычислениеинтегралов.
Цель:выполнятьарифметическиедействиянадчислами,сочетаяустныеиписьменныеприемы;выполнятьпреобразованиявыражений,применяяформулы,

Студентдолженазнать:
- таблицунеопределенныхинтегралов;
- методывычисления

Студентдолженуметь:
- использоватьформулыинтегрирования.

Теоретическоеобоснование

Совокупностьвсехпервообразныхдляфункции $f(x)$,определенныхнанекоторомпромежутке $[a;\quad b]$,называется*неопределенныминтеграломотфункции* $f(x)$ наэтомпромежуткеиобозначаетсясимволом $\int f(x)dx$.

Методыинтегрирования

Непосредственноеинтегрирование.

Пример№1.

$$\int\frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx=3\int x^2dx+2\int dx-3\int\frac{dx}{x}+7\int x^{-2}dx=3\frac{x^3}{3}+2x-3\ln|x|+7\frac{x^{-1}}{(-1)}+C=$$
$$=x^3+2x-3\ln|x|-\frac{7}{x}+C$$

Пример№2,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{25x^2+4}}=\int\frac{dx}{\sqrt{25\left(x^2+\frac{4}{25}\right)}}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{25}}}=\frac{1}{5}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{4}{25}}\right|+C=$$
$$=\frac{1}{5}\ln\left|x+\frac{1}{5}\sqrt{25x^2+4}\right|+C==\frac{1}{5}\ln\left|5x+\sqrt{25x^2+4}\right|+C_1,\text{где}\ C_1=C-\frac{\ln 5}{5}$$

Интегрированиеметодомзаменыпеременной(методомподстановки).

Пример№3.

$$\int\frac{3\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}}$$

Положим $1+2\sin x=t$, тогда $2\cos xdx=dt$,или $\cos xdx=\frac{1}{2}dt$.Следовательно,

$$\int\frac{3\cos xdx}{\sqrt{1+2\sin x}}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{3}{2}\int t^{-1/2}dt=\frac{3}{2}\cdot 2t^{1/2}+C=3\sqrt{t}+C=3\sqrt{1+2\sin x}+C$$

Интегрированиепочастям $\int udv=uv-\int vdu$

Пример№4.

$$\int x\sin 2x dx$$

Положим $u = x, \quad dv = \sin 2x dx$,тогда $du = dx, \quad v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$$\int x\sin 2x dx = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Интегрированиенекоторыхтригонометрическихфункций

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Пример№5.

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx$$

Впоследнеминтегралезаменим $\cos^2 2x$ на $\frac{(1+\cos 4x)}{2}$;тогдаполучим

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

ПриращениеF(b)–*F(a)*любойизпервообразныхфункций*F(x)+C*приизмененииаргументаот*x=a*до*x=b*называется*определенныминтеграломфункции* $f(x)$ иобозначается $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Функция $f(x)$,длякоторойсуществуетопределенныйинтеграл $\int_a^b f(x)dx$,называетсяинтегрируемойнаотрезке $[a; \quad b]$

Пример№6.Вычислитьопределенныйинтеграл.

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2\sin x dx}{(1-\cos x)^2}$$

Положим $1-\cos x = t$,тогда $\sin x dx = dt$, $t_{н.} 1-\cos\left(\pi/2\right) = 1$; $t_{в.} = 1-\cos\pi = 2$.

Следовательно,

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2\sin x dx}{(1-\cos x)^2} = 2\int_1^2 \frac{dt}{t^2} = 2\int_1^2 t^{-2}dt = -2t^{-1}\Big|_1^2 = -\frac{2}{t}\Big|_1^2 = 2 = 1$$

Пример№7.Вычислитьопределенныйинтеграл.

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x dx}{e^{2x}-1}$$

Положим $e^x = t$,тогда $e^x dx = dt$, $t_н = e^{\ln 2} = 2$, $t_в = e^{\ln 3} = 3$.Следовательно,

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x dx}{e^{2x}-1} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Ходработы

В-1	№1	№31	61
В–2	№2	№32	62
В–3	№3	№33	63
В–4	№4	№34	64
В–5	№5	№35	65
В–6	№6	№36	66
В–7	№7	№37	67
В–8	№8	№38	68
В–9	№9	№39	69
В-10	№10	№40	70
В-11	№11	№41	71
В-12	№12	№42	72
В-13	№13	№43	73
В-14	№14	№44	74
В-15	№15	№45	75

В-16	№16	№46	76
В-17	№17	№47	77
В-18	№18	№48	78
В-19	№19	№49	79
В-20	№20	№50	80
В–21	№21	№51	81
В–22	№22	№52	82
В–23	№23	№53	83
В–24	№24	№54	84
В–25	№25	№55	85
В–26	№26	№56	86
В–27	№27	№57	87
В–28	№28	№58	88
В–29	№29	№59	89
В–30	№30	№60	90

Задание 1 Найтиинтеграл:

1. $\int\left(x^2+2x-1\right)dx$ **7.** $\int\left(x^2-2x+8\right)dx$

2. $\int\left(x^3-3x^2+7\right)dx$ **8.** $\int\left(-x^2+5x+4\right)dx$

3. $\int\left(x^4+4x-6\right)dx$ **9.** $\int\left(-x^3+3x-2\right)dx$

4. $\int\left(2x^3-15x^2+36x-270\right)dx$ **10.** $\int\left(x^3+3x+2\right)dx$

5. $\int\frac{dx}{x}$ **11.** $\int\left(-\frac{2x^2}{3}+x+\frac{2}{3}\right)dx$

6. $\int\left(8x^2-\ln x\right)dx$ **12.** $\int\left(x^4-2x^2-3\right)dx$

13. $\int\left(2x^2-5x+7\right)dx$ **22.** $\int\left(x^3+4x\right)dx$

14. $\int\left(2x^3+x-5\right)dx$ **23.** $\int\left(x^3-6x^2-15x-2\right)dx$

15. $\int\left(-2x+\sin x\right)dx$ **24.** $\int\left(4x-5\right)dx$

16. $\int\left(5x^2-3x+1\right)dx$ **25.** $\int\left(x^2(x-3)\right)dx$

17. $\int\left(x^3-27x\right)dx$ **26.** $\int\left(4-x^4\right)dx$

18. $\int\left(12x+3x^2-2x^3\right)dx$ **27.** $\int\left[x\left(x^2-12\right)\right]dx$

19. $\int\left[x^3+3x^2-9x+1\right]dx$ **28.** $\int\left(x^4-2x^2\right)dx$

20. $\int\left(8x^2-x^4\right)dx$ **29.** $\int\left(x^3-27x+2\right)dx$

21. $\int\left(x^4-4x-9\right)dx$ **30.** $\int\left(-1+3x^2-x^3\right)dx$

Задание 2 Найтиинтеграл:

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$ **46.** $\int \left(e^{-x^2}\right)dx$

32. $\int = \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$ **47.** $\int (x-3)^5 dx$

33. $\int (5x+2)^7 dx$ **48.** $\int \sqrt[3]{(x+5)^2}\,dx$

34. $\int \sqrt{2x-1}dx$ **49.** $\int \sqrt[4]{2x-3}dx$

35. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$ **50.** $\int \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+5}}$

36. $\int \left(x^4+3\right)^5 x^3 dx$ **51.** $\int \frac{3x^2 dx}{\left(2-x^3\right)^4}$

37. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x^3-5}}$ **52.** $\int \frac{3dx}{x-1}$

38. $\int \frac{6dx}{3x+7}$ **53.** $\int \frac{3xdx}{5+x^2}$

39. $\int \frac{x^3 dx}{3x^4-2}$ **54.** $\int \frac{2\cos x dx}{3\sin x+5}$

40. $\int x\cdot\cos\left(x^2+3\right)dx$ **55.** $\int 5\sin 3x dx$

41. $\int 2\cos\frac{x}{2}dx$ **56.** $\int \frac{5dx}{\cos^2 2x}$

42. $\int \frac{3dx}{\sin^2 3x}$ **57.** $\int \frac{2dx}{e^{3x}}$

43. $\int tg5xdx$ **58.** $\int x\cdot\cos xdx$

44. $\int ctg(x+5)dx$ **59.** $\int x\cdot e^x dx$

45. $\int \cos 3xdx$ **60.** $\int (x-1)e^{2x}dx$

Задание 3 Найтиопределенныйинтеграл:

61. $\int_{-1}^{2}\left(x^2-3x+7\right)dx$ **70.** $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{128xdx}{\left(x^2+1\right)^5}$

62. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{e^{2x}}$ **71.** $\int_{0}^{\sqrt{3}}6\sqrt{x^4+16}x^3dx$

63. $\int_{-1}^{3}\left(1-2x+3x^2\right)dx$ **72.** $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{2\sqrt{1+x^2}}$

64. $\int_{1}^{4}\left(2x^2-3x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$ **73.** $\int_{2}^{4}\frac{15xdx}{\left(x^2-1\right)^3}$

65. $\int_{-1}^{1}\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)dx$ **74.** $\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos xdx}{2+\sin x}$

66. $\int_{1}^{4}\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$ **75.** $\int_{0}^{\pi/3}\frac{\sin xdx}{3-\cos x}$

67. $\int_1^8 \left(4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ **76.** $\int_0^1 \frac{6x^2dx}{1+2x^3}$

68. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ **77.** $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x+5}$

69. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$ **78.** $\int_{1/2}^{2} (2x-1)^3 dx$

19. $\int_1^3 \frac{dx}{3+x^2}$ **85.** $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 2x dx$

80. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x}$ **86.** $\int_0^{3\pi/2} \cos\frac{x}{3}dx$

81. $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$ **87.** $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$

82. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2\sin x dx}{(1-\cos x)^2}$ **88.** $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

83. $\int_{2\sqrt{2}}^{4} 3x\sqrt{x^2-7}dx$ **89.** $\int_0^1 \frac{dx}{6-5x+x^2}$

84. $\int_{-1}^{2} (x^2-1)^3 x dx$ **90.** $\int_3^4 \frac{dx}{25-x^2}$

Контрольныевопросы

1. Дайтеопределениенеопределенногоинтеграла?
2. Таблицаинтегралов
3. Перечислитеметодывычислениянеопределенногоинтеграла.
4. Чтоназываетсяопределенныминтегралом?
5. Перечислитеметодыинтегрирования.

Содержаниеотчета.

1.Решитьзадание№1изаписатьегоответ.
2.Решитьзадание№2изаписатьегоответ.
3.Решитьзадание№3изаписатьегоответ
4.Устноответитьнаконтрольныевопросы.

Практическая работа№ 3

Тема.Вычисление производныхВычисление производныхвысших порядков и дифференциалы высших порядков.

Цель: Формирование навыков вычисления производных и дифференциалов высших порядков

Студент должен знать:

- понятие функции нескольких переменных и ее области определения;
- понятие предела функции нескольких переменных;
- определение частных производных и дифференциала функции нескольких переменных;

Студент должен уметь:

- находить значения функции нескольких переменных,
- находить область определения функции нескольких переменных;
- вычислять частные производные и дифференциалы.

Теоретическое обоснование

Производнаявторогопорядка(втораяпроизводная)отфункции $y = f(x)$ естьпроизводнаяотеепервойпроизводной: $y'' = \left(f'(x)\right)'$.

Производнаятретьегопорядка(третьяпроизводная)отфункции $y = f(x)$ естьпроизводнаяотеевторойпроизводной: $y''' = \left(f''(x)\right)'$.

Производнаяn–гопорядка(*n–я*производная)отфункции $y = f(x)$ естьпроизводнаяотее*(n–1)–ой*производной: $y^{(n)} = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Дифференциалвторогопорядка(второйдифференциал)функции $y = f(x)$ естьдифференциалотеепервогодифференциала: $d^2 y = d(dy)$.

Дифференциалтретьегопорядка(третийдифференциал)функции $y = f(x)$ естьдифференциалотеевторогодифференциала: $d^3 y = d(d^2 y)$.

Дифференциалn–гопорядка(*n–ый*дифференциал)функции $y = f(x)$ естьдифференциалотее*(n–1)–ого*дифференциала: $d^n y = d(d^{n-1} y)$.

Примеры

<u>Задание1:</u>Найти y', y'', y''',…,если $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 0{,}5x + 7$.

<u>Решение:</u> $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - 0{,}5$,

$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2$,

$y''' = 60x^2 + 48x - 18$,

$y^{IV} = 120x + 48$, $y^{V} = 120$, $y^{VI} = y^{VII} = \ldots = 0$.

<u>Задание2:</u>Найтидифференциалыпервого,второгоитретьегопорядковфункции $y = (2x-3)^3$.

<u>Решение:</u> $dy = 3\cdot(2x-3)^2\cdot 2dx = 6\cdot(2x-3)^2 dx$,

$d^2 y = 12\cdot(2x-3)\cdot 2dx^2 = 24\cdot(2x-3)dx^2$,

$d^3 y = 24\cdot 2dx^3 = 48dx^3$.

Ходработы

1.Найдитепроизводныевторогопорядка:

1) $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x$;2) $y = (2x+5)^3$;3) $y = \dfrac{1}{x-1}$;4) $y = -\dfrac{22}{x+5}$;

5) $y = \cos^2 x$;6) $y = e^{-x^2}$;7) $y = 5^{\sqrt{x}}$;8) .

2.Найдитепроизводныетретьегопорядка:

1) $y = \dfrac{x}{6\cdot(x+1)}$;2) $y = (2x+3)^3 \cdot \sqrt{2x+3}$.

3.Найдитедифференциалыпервого,второгоитретьегопорядковфункций:

1) $y = 2x^3 + 5x^2$;2) $y = e^{x^3}$;3) $y = x\cdot(\ln x - 1)$.

Контрольныевопросы:

1.Чтоназываетсяпроизводнойвторогопорядка?

2.Чтоназываетсяпроизводной*n–го*порядка?

3.Чтоназываетсядифференциаломфункции?

4.Чтоназываетсядифференциаломвторогопорядка?

5.Чтоназываетсядифференциалом*n–го*порядка?Покакойформулеонвычисляется?

Содержание отчета.

1. Решить задание № 1 и записать его ответ.
2. Решить задание № 2 и записать его ответ.
3. Решить задание № 3 и записать его ответ
4. Устно ответить на контрольные вопросы.

Практическая работа№ 4

Тема.Вычисление двойных интегралов.Вычисление повторных интегралов.

Цель: приобретение навыков вычисления двойного интеграла

Студент должен знать:

- определенный интеграл и его свойства,
- таблица неопределенных интегралов,
- свойства двойных интегралов, двукратный интеграл;

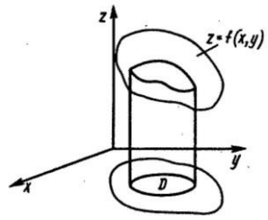
Студент должен уметь:

- находить двойные интегралы сведением его к повторному (двукратному) интегралу

Теоретическое обоснование

Понятие двойного интеграла.

Пусть в некоторой области Dплоскости *xOy*задана непрерывная функция *z= f (x, y)*



Разобьем область Dпроизвольным образом на nэлементарных областей с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \ldots \Delta S_n$и в каждой из них произвольно выберем по одной точке $M_i(x_i,y_i)$. Умножим значение функции в этой точке $f(x_i,y_i)$ на площадь ΔS_iсоответствующей области и составим сумму этих произведений, т. е. $\sum f(x_i, y_i)\Delta S_i$, которая называется *интегральной суммой* функции*f (x, y)* в области*D*.

Двойным интегралом функции*f(x, y)* по области*D*называется предел этой суммы:

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint\limits_D f(x,y)dS \qquad (1)$$

где *d* – наибольший из диаметров элементарных областей ΔS_i.Функция *z= f (x, y)*, для которой предел (1) существует и конечен, называется интегрируемой в этой области.

В прямоугольных координатах дифференциал площади равен *dS = dxdy*, тогда двойной интеграл примет вид

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dS \, (2)$$

Если*f(x,y)*>0, то двойной интеграл функции*z= f(x, y)* по области*D*равен объему тела, ограниченного сверху поверхностью*z*=*f*(*x*,*y*), сбоку цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси*Oz*, а направляющей служит контур фигуры*D*, и снизу плоскостью *z*=0 (рис.1).

Основные свойства двойного интеграла.

1°**.** *Двойной интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от слагаемых функций:*

$$\iint\limits_D (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D f_2(x,y))dxdy$$

2°. *Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла:*

$$\iint_D kf(x,y)dS = k\iint_D f(x,y)dS$$

3°. *Область интегрирования двойного интеграла можно разбить на части, т. е. если область Dсостоит из двух областей D_1 и D_2, то*

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_{D_1} f(x,y)dS + \iint_{D_2} f(x,y)dS$$

Понятие повторного (двукратного) интеграла.

1) Если областьD, в которой рассматривается двойной интеграл , есть прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям и заданными уравнениями $x=a$, $x=b(a \le x \le b)$, $y = c$, $y=d(c \le y \le d)$ (рис. 2), то двойной интеграл вычисляется по одной из формул

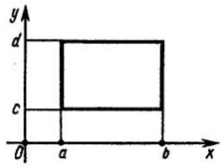


Рис.2

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \quad (3)$$

или

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \quad (4)$$

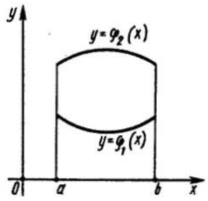
Интегралы в правых частях формул (3) и (4) называются ***повторными*** (или***двукратными***).

Первое интегрирование в формуле (3) (внутреннее) по переменной yсовершается в пределах от c до d в предположении, что x остается постоянным; результат интегрируется по переменной x в пределах от a до b.

Если вычисление двойного интеграла выполняется по формуле (4), то порядок интегрирования меняется; внутренний интеграл вычисляется по переменной x, причем y сохраняет постоянное значение, а внешнее (повторное) интегрирование производится по переменной y.

Вычисление двойного интеграла с помощью повторного интеграла.

Если область D такова, что любая прямая, проходящая внутри этой области и параллельная оси Oy, пересекает ее границу в двух точках, то эта область называется простой

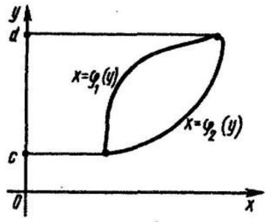


относительно оси *Ox* и определяется системой неравенств вида $a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$.

В этом случае двойной интеграл выражается через повторный интеграл по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \quad (5)$$

Если граница области *D* пересекается в двух точках всякой прямой, проходящей внутри этой области и параллельной оси *Ox*,



то эта область называется простой относительно оси *Oy* и определяется системой неравенств вида $c \le y \le d, \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$.

В этом случае двойной интеграл выражается формулой

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx \quad (6)$$

где интегрирование сначала выполняется по переменной *x*, а затем по переменной *y*.

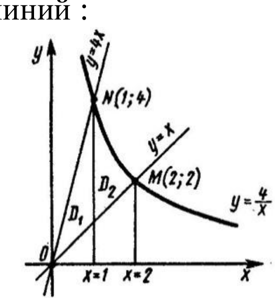
Если нижняя или верхняя линии границы состоят из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область *D* необходимо разбить прямыми, параллельными оси *Oy*, на такие части, чтобы каждый из участков выражался одним уравнением. В этом случае вычисление двойного интеграла сводится к вычислению двух (и более) повторных интегралов.

Пример 1.

Вычислить двойной интеграл $\int_D (x+2y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $y=x$, $y=4x$, $y=\frac{4}{x}$.

Решение:

Находим точки пересечения этих линий :



$$\begin{cases} y = 4x \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}, N(1;4)$$

Область *D*разобьем на две области D_1 и D_2, которые соответственно определяются системами неравенств $0 \le x \le 1, x \le y \le 4x,$ и $1 \le x \le 2, x \le y \le {}^4/_x$.

Вычислим двойной интеграл по области D_1:

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} (x+2y)dxdy$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{4x} (x+2y)dy = \int\limits_0^1 (xy+y^2)\Big|_x^{4x} dx = \int\limits_0^1 (4x^2+16x^2-x^2-x^2)dx$$

$$= 18\int\limits_0^1 x^2dx = 18\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 6$$

Вычислим двойной интеграл по области*D_2:*

$$I_2 = \iint\limits_{D_2} (x+2y)dxdy$$

$$= \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{4/x} (x+2y)dy = \int\limits_1^2 (xy+y^2)\Big|_x^{4/x} dx = \int\limits_1^2 \left(4+\frac{16}{x^2}-x^2-x^2\right)dx$$

$$= \int\limits_1^2 (4+16x^{-2}-2x^2)dx = \left(4x-\frac{16}{x}-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_1^2 = 7\frac{1}{3}$$

Значит, $I = I_1 + I_2 = 6 + 7\frac{1}{3} = 13\frac{1}{3}$

Ход работы

Вычислить двойные интегралы

ВАРИАНТ 1

1) $$\iint\limits_D xydxdy,$$

если D – треугольник, ограниченный прямыми *x=0, y=0, x+y=1*

2) $$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}dxdy,$$

если D – область, ограниченнаялиниями $y = \frac{x^2}{9}$*, x=3, y=0*

ВАРИАНТ 2

1) $$\iint\limits_D \frac{y^2}{1+x^2}dxdy,$$

еслиD – прямоугольник *0≤x≤1, 1≤y≤3*

2) $$\iint\limits_D (x^3+y^3)dxdy,$$

если D – область, ограниченнаялиниями $y = \frac{x}{2}$*, y=x, x=4*

ВАРИАНТ 3

1) $$\iint\limits_D x^2ydxdy,$$

если D – область, ограниченнаялиниями $y = x^2$*, y=1*

2) $$\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2}dxdy,$$

если D – область, ограниченнаялиниями $y = \frac{x}{3}$*, y=*$\sqrt{x}$ *,x=1*

ВАРИАНТ 4

1) $$\iint\limits_D \sin(2x+y+\frac{\pi}{4})dxdy,$$

если D – прямоугольник $0 \le x \le \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \le y \le 0$.

2) $$\iint\limits_D (x+y)dxdy,$$

если D – треугольник, ограниченный прямыми x=0, y=0, x+y=3

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение двойного интеграла.

2. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции f(x, y) в области D.
3. Сформулируйте достаточное условие интегрируемости функции f(x, y) в области D.
4. Сформулируйте свойства двойного интеграла.
5. Расскажите о сведении двойного интеграла к повторному в случае прямоугольной области интегрирования.
6. Расскажите о сведении двойного интеграла к повторному в случае криволинейной области интегрирования.

Содержание отчета.

1. Решить задание № 1 и записать его ответ.
2. Решить задание № 2 и записать его ответ.
3. Устно ответить на контрольные вопросы.

Практическая работа № 5

Тема Определение числового ряда. Исследование сходимости рядов

Цель:Проверить умение применять методы дифференциального и интегрального исчисления, исследовать числовые ряды на сходимость.

Студент должен знать:

- понятия: числовой ряд, сумма числового ряда, сходящийся, расходящийся ряд, ряд с положительными членами, знакочередующийся ряд;
- теоремы сравнения рядов с положительными членами;

Студент должен уметь:

- находить сумму ряда пользуясь определением, исследовать на сходимость положительные и знакочередующиеся ряды.

Теоретическое обоснование

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n},$$

где числа $a_1, a_2, a_3..., a_n,$ называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность.Ряд называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$.......................................$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

при n→ ∞ имеет конечный предел: $\lim_{n\to\infty} S_n = S.$ Этот предел называется суммой сходящегося ряда.

Если $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен, то ряд называется расходящимся.

Пример 1.Найти сумму ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$$

Решение. По определению частичной суммы ряда имеем

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4},$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5},$$

Таким образом, получаем последовательность частичных сумм: $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};...,$ общий член

который равен $\frac{n}{n+1}$. $\lim_{n\to\infty} Sn = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

Это означает, что ряд сходится и сумма его равна единице.

1.Необходимый признак сходимости ряда. Достаточные признакисходимости рядов с положительными членами.

Ряд может сходиться только при условии, что его общий член a_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю: $\lim_{n\to x} a_n = 0$ - это необходимый признак сходимости ряда. Если же $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$ то ряд расходится – это достаточный признак расходимости ряда.

Для знакоположительных числовых рядов имеют место следующие достаточные признаки, по которым можно установить их сходимость или расходимость.

1.Признак сравнения. Если члены знакоположительного ряда

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad (1)$$

начинаяс некоторого номера, не превосходят соответствующих членов ряда

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n \ldots, \quad (2)$$

то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда(2).

При исследовании рядовна сходимость и расходимость по этому признаку часто используетсягеометрическая прогрессия.

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots (a > 0),$$

которая сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1.$

Гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

является расходящимся рядом.

2.Признак Даламбера. Если для ряда (1) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

то при $l < 1$ ряд сходится, $l > 1$ - расходится(при $l = 1$ вопрос о сходимости рядаостается открытым).

3. Знакочередующиеся ряды. Признак сходимости Лейбница.

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots, \quad (1)$$

где $a_{1,}, a_2, a_3, \ldots, a_n -$ положительные числа.

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий признак сходимости.

Признак Лейбница.Ряд (1) сходится, если его члены монотонно убывают по абсолютной величине и общий член стремится к нулю при $n \to \infty.$

Применение сходящихся рядовк приближенным вычислениям основано на замене суммы рядасуммой нескольких первых его членов .Допускаемая при этом погрешность очень просто оценивать для знакочередующегося ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница, - эта погрешностьменьше абсолютного значения первого из отброшенных членов ряда.

Пример 2.Пользуясь необходимым признаком сходимости, показать, что ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots$ расходится.

Решение. Находим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Таким образом, предел общего члена ряда при $n \to \infty$ отличен от нуля, т.е. необходимый признаксходимости не выполняется. Это означает, что данный ряд расходится.

Пример 3.Спомощью признака сравнения исследовать на сходимость ряд:

$$1)\frac{1}{5\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^3}+...+\frac{1}{5\cdot 2^n}+...;$$

$$2) 1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+...$$

Решение.1) Сравним данный ряд с рядом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+... \text{ .}(*)$$

Ряд (*) сходится, так как его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессии со знаменателем $q=1/2$. При этом каждый член $a_n=1/(5\cdot 2^n)$ исследуемого ряда меньше соответствующего члена $b_n=1/2^n$ ряда (*).Поэтому, согласно признаку сравнения, данный ряд сходится.

2)Сравним данный ряд с гармоническим рядом

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+....(**)$$

Каждый член $a_n=1/\sqrt[3]{n}$ исследуемого ряда, начиная со второго, больше соответствующего члена $b_n=1/n$ ряда(**). Так как гармонический ряд расходится, то, согласно признаку сравнения, расходится и данный ряд.

Пример 4. С помощью признакаДаламбера исследоватьна сходимость ряд:

$$1)\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+...+\frac{n}{3^n}+...;$$

$$2)\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+...+\frac{n!}{10^n}+....$$

Решение.1)Для того чтобы воспользоваться признаком Даламбера, надо знать (n+1)-й член ряда. Он получается путем подстановки в выражение общего члена ряда $a_n=n/3^n$ вместо n числа $n+1$: $a_{n+1}=(n+1)/3^{n+1}$. Теперь найдем предел отношения $(n+1)$- го членак n-му члену при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3^{n+1}}\div\frac{n}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{n3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}.$$

Так как $l=1/3<1$, то данный ряд сходится.

2)зная $a_n=n!/10^n$, найдем $(n+1)-й$ член ряда: $a_{n+1}=(n+1)!/10^{n+1}$.

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left[\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\div\frac{n}{10^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!10^n}{n!10^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty.$$

Так как $l=\infty>1$, то ряд расходится.

Пример 5.Пользуясь признакомЛейбница, исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+... \text{ .}$$

Решение.Так как члены данного ряда по абсолютной величине монотонного убывают:

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>...>\frac{1}{n}>... \text{ .}$$

и общий член при $n\to\infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

то в силупризнака Лейбница рядсходится.

Ход работы

Вариант 1:

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

$$a_n = \frac{1}{4n^2+1}; б) a_n = \frac{2^n}{n!}.$$

2.Найти формулу общего члена ряда:

$$а) 2+4+8+16+...; б) \frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...$$

3.Установить расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+4}$ с помощью следствия из необходимого признака.

4.Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряд:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}; б) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2n}.$$

5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость ряд:

$$а) 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+...; б) 1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+...$$

Вариант 2:

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

$$а) a_n = \frac{2n+1}{n^2}; б) a_n = \frac{n}{(n+1)\cdot 2^n}.$$

2.Найти формулу общего члена ряда:

$$а) \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+....; б) 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...$$

3.Установить расходимостьряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2n+1}$ с помощью следствия из необходимогопризнака.

4.Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряд:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}; б) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}.$$

5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость ряд:

$$а) 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...; б) 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...$$

$$а) \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n}{3n-1}; б) 1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+....$$

Контрольные вопросы

1. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
2.Запишите формулу Ньютона-Лейбница
3.Какие основные свойства определенного интеграла вы знаете?
4. В чем заключается метод непосредственного интегрирования?
5.С каким способом интегрирования вы еще знакомы и в чем его суть?

Содержание отчета.

1. Решить задание № 1-5 и записать ответ.
2. Устно ответить на контрольные вопросы.

Практическая работа № 6

Тема. Решение дифференциальных уравнений.

Цель: Проверить на практике знание понятия дифференциального уравнения, виды дифференциальных уравнений, умение решать дифференциальные уравнения, находить общее и частное решение.

Студент должен знать:

- понятие дифференциального уравнения (ДУ), порядок ДУ, общего и ча-стного решения;
- понятие ДУ с разделяющимися переменными, алгоритм их решения

Студент должен уметь:

- находить общие и частные решения ДУ с разделяющимися переменными;
- находить общие и частные решения ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами;
- составлять ДУ для решения задач прикладного характера.

Теоретическое обоснование

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные $y', \quad y'', \quad ..., \quad y^{(n)}$.

$$F(x, \quad y, \quad y', \quad y'', \quad ..., \quad y^{(n)}) = 0$$

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, \quad y, \quad y') = 0$$

Задача нахождения частного решения ДУ, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши.*

ДУ имеют либо *общеерешение* (семейство кривых), либо *частноерешение* (интегральная кривая).

Дифференциальное уравнение называется *уравнением с разделяющимися переменными,* если имеет следующий вид:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

<u>Пример № 1.</u> Найти общее решение уравнения $(x^2 y^2 - x^2 y)dy - xy^2 dx = 0, \quad x \neq 0$

Решение:

Преобразуем данное уравнение:

$$x^2 y(y-1)dy = xy^2 dx, \quad \text{или} \quad \frac{y-1}{y} dy = \frac{dx}{x}, \quad \text{где} \quad y \neq 0$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{y-1}{y} dy = \int \frac{dx}{x},$$

$$y - \ln|y| = \ln|x| + C_1$$

Для удобства потенцирования представим y в виде $y = \ln e^y$ и постоянную интегрирования C_1 в виде $C_1 = -\ln|C|$, $C \neq 0$

Имеем

$$\ln e^y - \ln|y| = \ln|x| - \ln|C|$$

Потенцируя, получим

$$\frac{e^y}{y} = \frac{x}{C}, \text{ или } \quad Ce^y = xy, \quad C \neq 0$$

Ответ: общее решение ДУ - $Ce^y = xy$

Пример № 2. Найти частное решение ДУ $2yy' = 1 - 3x^2$, если $y_0 = 3$ при $x_0 = 1$

Решение:

Преобразуем данное уравнение:

$$2y\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2,$$

$$2ydy = (1 - 3x^2)dx$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$2\int ydy = \int (1 - 3x^2)dx$$

Общее решение ДУ:

$$y^2 = x - x^3 + C$$

Подставив начальные значения $y_0 = 3$ и $x_0 = 1$, найдем *C:*

$9 = 1 - 1 + C$, т. е. $C = 9$

Следовательно, искомый частный интеграл будет

$y^2 x - x^3 + 9$, или $x^3 + y^2 - x - 9 = 0$

Ответ: частное решение ДУ - $x^3 + y^2 - x - 9 = 0$

Пример № 3. Найти общее решение уравнения $6e^x \cos^2 ydx + (1 - 2e^x)ctgydy = 0$

Решение:

Разделим переменные в данном уравнении, поделив обе его части на выражение $\cos^2 y(1 - 2e^x) \neq 0$:

$$\frac{6e^x}{1 - 2e^x}dx + \frac{1}{\cos^2 ytgy}dy = 0$$

Интегрируя обе части уравнения, имеем:

$$-3\ln|1 - 2e^x| + \ln|tgy| = \ln C$$

Отсюда получаем $\dfrac{tgy}{(1 - 2e^x)^3} = C$, или $tgy = C(1 - 2e^x)^3$ - это общее решение ДУ.

Ответ: общее решение ДУ - $tgy = C(1 - 2e^x)^3$

Ход работы

В - 1	№ 1
В – 2	№ 2
В – 3	№ 3
В – 4	№ 4
В – 5	№ 5
В – 6	№ 6
В – 7	№ 7
В – 8	№ 8
В – 9	№ 9
В - 10	№ 10
В - 11	№ 11
В - 12	№ 12
В - 13	№ 13
В - 14	№ 14
В - 15	№ 15

В - 16	№ 16
В - 17	№ 17
В - 18	№ 18
В - 19	№ 19
В - 20	№ 20
В – 21	№ 21
В – 22	№ 22
В – 23	№ 23
В – 24	№ 24
В – 25	№ 25
В – 26	№ 26
В – 27	№ 27
В – 28	№ 28
В – 29	№ 29
В – 30	№ 30

Задание 1 Найти общее решение ДУ:

1. $(y-1)^2dx+(1-x)^3dy=0$

2. $x\sqrt{9-y^2}dx-y(4+x^2)dy=0$

3. $\cos x\cos ydx-\sin x\sin ydy=0$

4. $\ln x\sin^3 ydx+x\cos ydy=0$

5. $(xy^2-y^2)dx-(x^2y+x^2)dy=0$

6. $(e^{x-y}-e^{-y})dx+(e^{x+y}+e^x)dy=0$

7. $(x+2)(y^2+1)dx+(y^2-x^2y^2)dy=0$

8. $3x\sqrt[3]{y}dx+(1-x^2)dy=0$

9. $ydx-(4+x^2)\ln ydy=0$

10. $y'e^{-x}=x-1$

11. $y'(x+\sqrt{x})=\sqrt{1-y}$

12. $\sin^2 x\cos^2 ydx-\cos^2 xdy=0$

13. $(1+y)dx-(1-x)dy=0$

14. $(xy^2+x)dx=(y-x^2y)dy$

15. $\sqrt{1-x^2}dy-\sqrt{1-y^2}dx=0$

16. $2(xy+y)dx=xdy$

17. $\dfrac{dy}{x-1}=\dfrac{dx}{y-2}$

18. $\cos x\sin ydy=\cos y\sin xdx$

19. $e^x(1+e^y)dx+e^y(1+e^x)dy=0$

20. $y'=x^2e^x$

21. $y'=\sin^3 x$

22. $(xy+x)\dfrac{dx}{dy}=1$

23. $(xy+y)dx=xdy$

24. $xy'=\ln x$

25. $\sqrt{y}dx+\sqrt{x}dy=0$

26. $(1+x^2)dy-(xy+x)dx=0$

27. $x^2y'-2xy=3y$

28. $x^2dx+ydy=0$

29. $(1+x^2)dy-2x(y+3)dx=0$

30. $(1+x)ydx=(y-1)xdy$

Контрольные вопросы

1. В чем заключается задача Коши.
2. Запишите общий вид ДУ I порядка с разделяющимися переменными.
3. Какие решения имеет ДУ.

Содержание отчета.

1. Решить задание, записать его ответ.

2.. Запишите ответы на вопросы.

Практическая работа № 7

Тема. Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка

Цель: Проверить знания и умения студентов в решении ОЛДУ II порядка.

Студент должен знать:

- определение ОЛДУ II порядка с постоянными коэффициентами;
- свойства логарифмов.

Студент должен уметь:

- использовать методы вычисления ОЛДУ II порядка.

Теоретическое обоснование

Однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0$$

Нахождение общего решения однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами сводится к решению двух его частных решений, образующих фундаментальную систему.

Составим характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$

При решении характеристического уравнения возможны следующие три случая.

1) Корни действительные и различные: $k_1 \neq k_2$,
   следовательно, общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^{kx_1} + C_2 e^{k_2 x}$
2) Корни действительные и равные: $k_1 = k_2$,
   следовательно, общее решение уравнения имеет вид $y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right)$
3) Корни комплексные $k_1 = \alpha + bi$ и $k_2 = \alpha - bi$,
   следовательно, общее решение уравнения имеет вид $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right)$

<u>Пример № 1.</u> Найти общее решение уравнения $y'' + 7y' + 12y = 0$,

Решение:

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + 7k + 12 = 0$$

$D = b^2 - 4a \cdot c = 7^2 - 4 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$, $\pm\sqrt{1} = \pm 1$,

$k_1 = \dfrac{-7-1}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4$, $k_2 = \dfrac{-7+1}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$

Так как корни действительные и различные, то общее решение уравнения

$$\underline{y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-3x}}$$

<u>Пример № 2.</u> Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' + 9y = 0$

Решение:

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

$D = b^2 - 4a \cdot c = 6^2 - 4 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$,

$$k_1 = \frac{-6}{2} == -3, \qquad k_2 = \frac{-6}{2} = -3$$

Так как корни действительные и равные, то общее решение уравнения

$$\underline{y = e^{-3x}\left(C_1 + C_2 x\right)}$$

<u>Пример № 3.</u> Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13 = 0$

Решение:

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

$$D = b^2 - 4a \cdot c = \left(-4\right)^2 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36, \qquad \left(\pm 6i\right)$$

$$k_1 = \frac{4 - 6i}{2} == 2 - 3i, \qquad k_2 = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$$

Так как корни комплексные, то общее решение уравнения

$$\underline{y = e^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)}$$

<u>Пример № 4.</u> Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$

Решение:

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

$$D = b^2 - 4a \cdot c = 2^2 - 4 \cdot 5 = 4 - 20 = -16, \qquad \left(\pm 4i\right)$$

$$k_1 = \frac{-2 - 4i}{2} == -1 - 2i, \qquad k_2 = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i$$

Так как корни комплексные, то общее решение уравнения

$$\underline{y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)}$$

Дифференцируя общее решение, найдем

$$y' = -e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + e^{-x}\left(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x\right),$$

или

$$y' = e^{-x}\left[\left(2C_2 - C_1\right)\cos 2x - \left(2C_1 + C_2\right)\sin 2x\right]$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из начальных условий:

$$\begin{cases} 0 = e^{-0}\left(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\right) \\ 1 = e^{-0}\left[\left(2C_2 - C_1\right)\cos 0 - \left(2C_1 + C_2\right)\sin 0\right] \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 0$ и $C_2 = \frac{1}{2}$.

Итак, искомым частным решением является функция $\underline{y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x}$

Ход работы

В - 1	№ 1
В – 2	№ 2
В – 3	№ 3
В – 4	№ 4
В – 5	№ 5
В – 6	№ 6
В – 7	№ 7
В – 8	№ 8
В – 9	№ 9
В - 10	№ 10
В - 11	№ 11
В - 12	№ 12
В - 13	№ 13
В - 14	№ 14
В - 15	№ 15

В - 16	№ 16
В - 17	№ 17
В - 18	№ 18
В - 19	№ 19
В - 20	№ 20
В – 21	№ 21
В – 22	№ 22
В – 23	№ 23
В – 24	№ 24
В – 25	№ 25
В – 26	№ 26
В – 27	№ 27
В – 28	№ 28
В – 29	№ 29
В – 30	№ 30

Задание 1 Найти общее решение ОЛДУ II порядка:

1. $y'' + 3y' - 4y = 0$

2. $y'' - 9y' + 14y = 0$

3. $y'' - y = 0$

4. $y'' + 2y' = 0$

5. $y'' - 14y' + 49y = 0$

6. $y' + y = e^{-x} y'' - 6y' + 45y = 0$

7. $y'' + 6y' + 8y = 0$

8. $y'' - 10y' + 25y = 0$

9. $y'' + 3y' + 2y = 0$

10. $y'' - 2y' + 2y = 0$

11. $y'' - y' - 12y = 0$

12. $y'' + 4y' + 4y = 0$

13. $y'' + 8y' = 0$

14. $y'' + 7y' + 6y = 0$

15. $y'' - y' + 13y = 0$

16. $y'' - 16y = 0$

17. $y'' - 3y' = 0$

18. $y'' + 8y' + 16y = 0$

19. $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$

20. $y'' + 4y' + 8y = 0$

21. $y'' - 9y = 0$

22. $y'' - y' - 2y = 0$

23. $y'' + 2y' + 5y = 0$

24. $y'' + 6y' + 9y = 0$

25. $y'' + 25y = 0$

26. $y'' + 9y = 0$

27. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$

28. $y'' + 4y' + 7y = 0$

29. $y'' - 10y' + 25y = 0$

30. $y'' + 2y' - 6y = 0$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами .
2. Каким методом решаются ОЛДУ II порядка.

Содержание отчета.

1. Решить задание и записать его ответ.

2.. Устно ответьте на вопросы

Практическая работа №8

ТемаВыполнение операций над матрицами. Вычисление определителей
Цель: формировать навыки выполнения операций над матрицами: сложение, вычитание, умножение матрицы на число, произведение матриц; формировать умения находить определители матриц.

Студент должен знать:

– знать правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядка;
– знать правила выполнения действий с матрицами;
– знать алгоритм вычисления матрицы, обратной данной;

Студент должен уметь:

- уметь вычислять определители 2-го и 3-го порядка;
- уметь выполнять действия с матрицами;
- уметь вычислять матрицу, обратной данной.

Теоретическое обоснование

Прямоугольная матрица A размера $m \times n$ ($m \times n$ -матрица) имеет вид таблицы, состоящей из m строк и n столбцов:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент матрицы a_{ij} находится на пересечении i -ой строки и j -го столбца, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

У *нулевой* матрицы 0 все элементы равны нулю:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица – столбец ($m \times 1$ -матрица) состоит из одного столбца:

$$\underset{(m \times 1)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

а *матрица – строка* ($1 \times n$ -матрица) из одной строки:

$$\underset{(1 \times n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Произведением двух матриц A и B называется матрица C , каждый элемент которой определяется по правилу *строка на столбец*, то есть элемент стоки матрицы A умножается на элемент столбца матрицы B стоящие на соответствующих местах.
Из определения произведения матриц следует, что не любые две матрицы можно перемножать. Произведение AB имеет смысл только тогда, когда число столбцов первой

матрицы-сомножителя равно числу строк второй матрицы-сомножителя, что символически записывается так:

$(m\times k)\cdot(k\times n)=(m\times n)$.

Транспонирование $m\times n$ -матрицы заключается в замене строк столбцами, а столбцов – строками с теми же номерами:

$$\underset{(m\times n)}{A}^{T}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица $C=(c_{ij})$ размера $m\times n$ называется *суммой* двух $m\times n$ -матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$, если каждый элемент матрицы C равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$\underset{(m\times n)}{C=A+B}\Leftrightarrow c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

Определителем второго порядка называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}. \quad (1)$$

Числа $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ называются *элементами* определителя; при этом элементы a_{11} и a_{22} образуют *главную диагональ*, а элементы a_{12} и a_{21} - *побочную диагональ*. Таким образом, определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

Определителем третьего порядка называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- \quad (2)$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Таким образом, каждый член определителя третьего порядка представляет собой произведение трех его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Эти произведения берутся с определенными знаками: со знаком «плюс» – члена, состоящие из элементов главной диагонали и из элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком «минус» – три члена, расположенные аналогичным образом относительно побочной диагонали.

Указанное правило, называется *правилом треугольников*.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель D_{n-1}, полученный из D_n вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}.$$

Определитель n -го порядка равен сумме произведений элементов какой – либо строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$$

(разложение определителя по элементам i -ой строки) или

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}$$

(разложение определителя по элементам j -го столбца).
В частности, для определителя третьего порядка имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

что совпадает с результатом, полученным по формуле (2).

<u>Пример 1:</u> Найти сумму и разность матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение:</u> Здесь даны матрицы одного размера 3×2 , следовательно, существуют их сумма и разность. Согласно определению алгебраической суммы матриц имеем

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+7 & -1+5 \\ 3+2 & 0-3 \\ -5+0 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-7 & -1-5 \\ 3-2 & 0-(-3) \\ -5-0 & -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 3 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример 2:</u> Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix}$.

<u>Решение:</u> 1) По формуле (1) находим

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2 \cdot 8 - 7 \cdot 3 = -37.$$

2) Разлагая данный определитель, например, по элементам первой строки, находим

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} (-4) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 28 - 4 \cdot (-46) + 1 \cdot (-22) = 218.$$

Тот же результат получится, если воспользоваться формулой (2):

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 6 + (-1) \cdot (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 5 \cdot 8 - 8 \cdot 3 \cdot 1 -$$

$$- 2 \cdot 5 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1) \cdot 6 = 218$$

.

Ход работы

Вариант 1.

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 1\\ -3 & 2 & -3\\ 4 & 8 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 2 & -4 & -2\\ 7 & 8 & 6\end{pmatrix}$.Найти матрицы C=A – 3B, D=4A + B.

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}7 & -3 & 9\\ 5 & -4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -6 & 1\\ -3 & 5\end{pmatrix}$. Найти произведение матриц A·B.

3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}9 & -3\\ 14 & 5\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 6\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$. Найти определители $|A|$.

4*. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 6\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу A^{-1}.

Вариант 2.

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}6 & -9 & 3\\ -4 & 2 & -5\\ -6 & 7 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-6 & -8 & 9\\ 4 & -2 & 3\\ 8 & -5 & 7\end{pmatrix}$.Найти матрицы C=4A + B, D=A – 5B.

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & -5\\ -8 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & -3\\ -2 & 1\\ 8 & 6\end{pmatrix}$.Найти произведение матриц A·B.

3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}9 & -4\\ 12 & 10\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}$. Найти определители $|A|$.

4*. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу A^{-1}.

Контрольные вопросы.

1. Определение матрицы. Пример матрицы.
2. Правила сложения и вычитания матриц.
3. Правило умножения матрицы на число.
4. Правило умножения двух матриц.
5. Определение согласованных матриц.
6. Определение минора элемента определителя.
7. Определение алгебраического дополнения элемента определителя.

Содержание отчета.

1. Решить задание № 1-4 и записать ответ.
2.. Устно ответьте на вопросы.

Практическая работа № 9

ТемаРешение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель: сформировать представление о решении систем линейных уравнений методом Гаусса.

Студент должен знать:

- определение системы линейных уравнений, однородных и неоднородных систем;

Студент должен уметь:

- решать системы уравнений методом Гаусса

Теоретическое обоснование

1. Системы линейных уравнений (общие сведения)

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Решением системы (1) называется совокупность чисел (k_1, k_2, …, k_n), которая при подстановке в систему (1) вместо неизвестных обращает каждое уравнение системы в тождество. Система может иметь решение, тогда она называется *совместной*, причем, если решение единственное, *система определенная*, если решений множество – *система неопределенная*. Если система не имеет решений, она называется *несовместной*.

2 . Метод Гаусса (или методом исключения неизвестных)

Пример 1

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}.$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу B данной системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Последовательно умножим первую строку на (–2) и прибавим ее ко второй строке, затем умножим на (–3) и прибавим к третьей строке, умножим на (–2) и прибавим к четвертой строке, получим

$$B \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Ко второй строке полученной матрицы прибавим третью строку, умноженную на (-1), затем во вновь полученной матрице умножим третью строку на $(-1/2)$, четвертую – на (–1), затем последовательно умножим вторую строку на 2 и прибавим ее к третьей строке, умножим на 7 и прибавим к четвертой строке, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & -5 & 20 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & -18 & 27 \\ 0 & 0 & 18 & -54 & 90 \end{array}\right).$$

Третью строку полученной матрицы умножим на $1/9$, четвертую – на $1/18$, затем третью строку умножим на (–1) и прибавим к четвертой строке, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Найденная матрица имеет треугольный вид; по этой матрице запишем систему уравнений, эквивалентную исходной системе,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ \quad - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 10 \\ \qquad x_3 - 2x_4 = 3 \\ \qquad\quad - x_4 = 2 \end{cases}.$$

Последовательно находим неизвестные, начиная с последнего уравнения, $x_4 = -2$; подставим в третье уравнение найденное x_4, вычислим x_3, $x_3 = -1$; затем из второго уравнения находим x_2, $x_2 = 2$; из первого уравнения получим x_1, $x_1 = 1$.

Ответ : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2$.

Пример 2

Найти общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 10x + 6y = 0 \end{cases}$.

Решение.

Элементарными преобразованиями строк приведем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$ к эквивалентной матрице $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, которой соответствует уравнение $5x + 3y = 0$, эквивалентное исходной системе. Таким образом, общее решение может быть записано в форме $y = -\frac{5}{3}x$, $x \in R$, или $x = -\frac{3}{5}y$, $y \in R$. Решений бесчисленное множество – любая пара, связанная указанной зависимостью, обращает левые части уравнений данной системы в нуль. В системе $n = 2$ - число неизвестных и число уравнений. $rangA = rangB = 1 < n$, A – матрица системы, B – расширенная матрица системы. В силу теоремы Кронекера-Капелли система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от одного параметра $(n - r = 2 - 1 = 1)$. Иногда общее решение удобнее использовать в форме

$x = 3t$, $y = -5t$, $t \in R$.

Ход работы

Задание 1 Методом Гаусса (или методом исключения неизвестных) найти решение системы линейных алгебраических уравнений.

Задание 2 Найти общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений

Вариант 1

1.1 $\begin{cases} 2x - y - 2z = -1 \\ 2y + z = 3 \\ -2x - 2y + 2z = -2 \end{cases}$ 1.2 $\begin{cases} 2x + y - 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_4 = 15 \end{cases}$ 1.4 $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$

Вариант 2

2.1 $\begin{cases} 3x + y - 3z = 8 \\ 3y - z = 7 \\ 3x - y - 3z = 4 \end{cases}$ 2.2 $\begin{cases} 4x + y + 4z = -3 \\ x + y + 2z = -4 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 6 \\ 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$ 2.4 $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$

Вариант 3

3.1 $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 4 \\ 4x + 9y + 16z = 6 \\ 8x + 27y + 64z = -2 \end{cases}$ 3.2 $\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$

3.3 $\begin{cases} 3x - 2y + 4z + 5t = 5 \\ x - y - z + t = 0 \\ 2x - 2y + 3z - 3t = 1 \\ 4x + 2y - 6z - t = 0 \end{cases}$ 3.4 $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2y - 6x = 0 \end{cases}$

Вариант 4

4.1 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ 4.2 $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - z = 11 \\ x - 2y + 2z = -7 \end{cases}$

4.3 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ 4.4 $\begin{cases} 3y - x = 0 \\ 6y - 2x = 0 \end{cases}$

Вариант 5

5.1 $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 2 \\ 9x + 16y + 25z = 2 \\ 27x + 64y + 125z = -10 \end{cases}$ 5.2 $\begin{cases} 2x - y - z = -9 \\ 3x + 4y - 2z = 6 \\ 3x - 2y + 4z = 12 \end{cases}$

5.3 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + 8x_3 + 11x_4 = 22 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 - 6x_2 + 13x_3 + 3x_4 = 13 \end{cases}$ 5.4 $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ 8x + 2y = 0 \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение уравнения.
2. Что значит решить уравнение?
3. Что называется линейным уравнением с одним неизвестным?
4. Перечислите основные методы решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными.
5. Что называется матрицей?
6. Что называется определителем второго порядка?
7. Что называется определителем третьего порядка?

Содержание отчета.

1. Решить задание № 1-4, записать ответ.

2.. Устно ответьте на вопросы.

Практическая работа № 10

Тема: Вычисление скалярного, смешанного, векторного произведения векторов

Цель: научиться вычислять векторное и смешанное произведения векторов.

Студент должен знать:

- определение n-мерного вектора и действия над ними,
- определение векторного, линейного и евклидового пространства,
- линейной комбинации векторов,
- линейно зависимых и линейно независимых векторов, n-мерного пространства и его размерности,
- скалярного произведения векторов и их нормы,
- базиса пространства, формулы перехода от старого базиса к новому и наоборот.

Студент должен уметь:

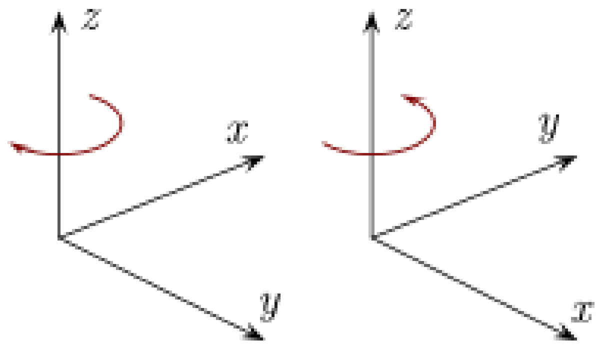
- доказывать, что данные векторы образуют базис,
- находить координаты вектора в данном базисе,
- находить связь между двумя базисами,
- вычислять скалярное произведение векторов и их норму.

Теоретическое обоснование

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется правой, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден совершающимся против часовой стрелки. В противном случае тройка называется левой.

Декартовы координаты в трехмерном пространстве (*левая* (на рисунке слева) и *правая* (справа) декартовы системы координат (левый и правый базисы). Принято по умолчанию использовать правые базисы (это общепринятое соглашение, если только какие-то особые причины не заставляют от него отойти — и тогда это оговаривается явно).



Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}\times\vec{b}$, который определяется тремя условиями:

1) длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ равна $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ образуют правую тройку векторов.

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=0$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - коллинеарные векторы.

2. Длина векторного произведения неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна площади S параллелограмма, построенного на этих векторах.

3. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

4. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

5. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Если $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то есть

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Если $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$,то $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Смешанное произведение $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ равно объему V параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому со знаком «+», если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - правая, со знаком «–», если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - левая. Если же $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}.$$

Ход работы

Вариант 1

1. Вершины треугольника находятся в точках A(-2;4;2), B(-4;0;1) и C(0;2;-1). Найдите площадь этого треугольника.

2. Векторы $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ совпадают с ребрами параллелепипеда, выходящими из одной вершины. Найдите объем параллелепипеда и площадь его грани, построенной на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Вариант 2

1. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

2. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Вариант 3

1. Вершины треугольника находятся в точках A(0;5;1), B(-2;0;3) и C(4;1;-1). Найдите площадь этого треугольника.
2. В тетраэдре с вершинами в точках $A(1,1,1)$,$B(2,0,2)$,$C(2,2,2)$ и $D(3,4,-3)$ вычислить высоту $h = \left|\vec{DE}\right|$.

Вариант 4

1. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1,1,1)$,$B(2,3,4)$ и $C(4,3,2)$.
2. Векторы $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$ совпадают с ребрами параллелепипеда, выходящими из одной вершины. Найдите объем параллелепипеда и площадь его грани, построенной на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение правой и левой тройки векторов.
2. Что такое векторное произведение векторов?
3. Какими свойствами обладает векторное произведение векторов?
4. Дайте определение смешанного произведения векторов.
5. В чем геометрический смысл смешанного произведения векторов?

Содержание отчета.

1. Решить задание № 1-2, записать ответ.

2.. Устно ответьте на вопросы.

Практическая работа № 11

Тема: Составление уравнения прямой на плоскости. Нахождение угла между прямыми и расстояние от точки до прямой..

Цель: Закрепление навыков и умений в решении задач на составление уравнений прямой на плоскости,

Студент должен знать:

- условия, при которых прямые пересекаются, параллельны, совпадают, в случаях, если прямые заданы общими уравнениями, каноническими, уравнениями с угловым коэффициентом;
- условия, при которых прямые перпендикулярны;
- формулу для нахождения расстояния от точки до прямой на плоскости;
- формулу для нахождения косинуса угла между пересекающимися прямыми в случаях, если прямые заданы общими уравнениями, каноническими, уравнениями с угловым коэффициентом

Студент должен уметь

- выяснять взаимное расположение прямых на плоскости;
- находить угол между прямыми на плоскости;
- находить расстояние от точки до прямой на плоскости;
- находить расстояние между параллельными прямыми на плоскости.

Теоретическое обоснование

1 Общее уравнение прямой

Если на плоскости произвольно взята декартова система координат, то всякое уравнение первой степени относительно текущих координат xи y

$Ax+By+C=0,$(1)

где Aи Bодновременно не равны нулю, определяет прямую в этой системе координат.

Верно и обратное утверждение: в декартовой системе координат всякая прямая может быть представлена уравнением первой степени вида (1). Уравнение (1) называется ***общим уравнением прямой.***Частные случаи уравнения (1) приведены в следующей таблице.

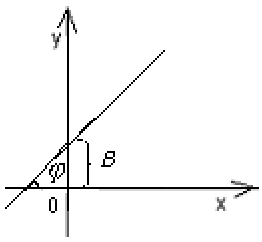
Значение коэффициентов	Уравнение прямой	Положение прямой
$C=0$	$Ax+By=0$	*Проходит через начало координат*
$A=0$	$y=b$, *где* $b=-C/B$	*Параллельна оси Ox*
$B=0$	$x=a$, *где* $a=-C/A$	*Параллельна оси Oy*
$A=0,\ C=0$	$y=0$	*Совпадает с осью Ox*
$B=0,\ C=0$	$x=0$	*Совпадает с осью Oy*

2 Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой

Углом наклона прямой к оси Ox называется наименьший угол φ, на который нужно повернуть в положительном направлении ось абсцисс до её совпадения с данной прямой. Направление любой прямой характеризуется её ***угловым коэффициентом k,*** который определяется как тангенс угла наклона φ этой прямой к оси *Ox,* т.е. $k=\text{tg}\,\varphi$. Исключения составляет лишь прямая, перпендикулярная оси *Ox,* которая не имеет углового коэффициента.

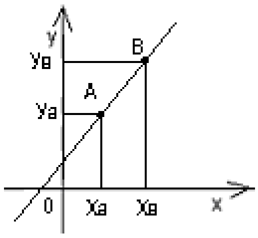
Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициентkи пересекающий ось *Oy в* точке, ордината которой равнаb(начальная ордината), записывается в виде

$y=kx+b.$ (2)



Угловой коэффициент k прямой, заданной уравнением $Ax+By+C=0$, находится как коэффициент k прямой, заданной двумя точками $A(x_a;\ y_a)$ и $B(x_B;y_B)$, вычисляется по формуле

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \quad (3)$$



Пример 1. Составить уравнение прямой, которая отсекает на отрицательной полуплоскости Oy отрезок, равный 2 единицам, и образует с осью Ox угол $\varphi=30^\circ$.

Решение: Прямая пересекает ось Oy в точке B (0;–2) и имеет угловой коэффициент $k=\text{tg}\ \varphi= =\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Полагая в уравнении (2) $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $b=-2$, получим искомое уравнение $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$, или $\sqrt{3}x-3y-6=0$.

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точки A (–1; 2) иB (0;–3). (*указание*: угловой коэффициент прямой находится по формуле (3))

Решение: $\kappa=\frac{-3-2}{0-(-1)}=-5$.Отсюда имеем $y=-5x-b$. Подставив в это уравнение координаты *т.В,* получим: $-3=-5\cdot 0+в$, т.е. начальная ордината $b=-3$. Тогда получим уравнение $y=-5x-3$.

3 Уравнение прямой в отрезках

*Уравнением прямой в отрезках*называетсяуравнение вида

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (4)$$

где a и b – абсцисса и ордината точек пересечения прямой с осями Ox и Oy, т.е. длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях, взятые с соответствующими знаками.

Пример 4. Общее уравнение прямой $2x-3y-6=0$ привести к уравнению в отрезках.

Решение: запишем данное уравнение в виде $2x-3y=6$ и разделим обе его части на свободный член: $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$. Это и есть уравнение данной прямой в отрезках.

Пример 5. Через точку A (1;2) провести прямую, отсекающую на положительных полуосях координат равные отрезки.

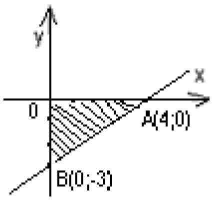
Решение: Пусть уравнение искомой прямой имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ По условию $a=b$. Следовательно, уравнение принимает вид $x + y = a$. Так как точка А (1; 2) принадлежит этой прямой, значит ее координаты удовлетворяют уравнению $x + y = a$; т.е. $1 + 2 = a$, откуда $a = 3$.Итак, искомое уравнение записывается следующим образом: $x + y = 3$, или $x + y – 3 = 0$.

Пример 6. Для прямой $y=\frac{3}{4}x-3$ написать уравнение в отрезках. Вычислить площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат.

Решение: Преобразуем данное уравнение следующим образом: $\frac{3}{4}x-y=3$, или $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$.

В результате получим уравнение $\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$, которое и является уравнением данной прямой в отрезках. Треугольник, образованный данной прямой и осями координат, является прямоугольным треугольником с катетами, равными 4 и 3, поэтому его площадь равна

S= $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$ *(кв. ед.)*



26

4 Уравнение прямой, проходящей через точку в данном направлении

Уравнение прямой, проходящей через т.у $A(x_a; y_a)$ и имеющей угловой коэффициент k, записывается в виде

$$y – y_a=k\ (x – x_a). \qquad (5)$$

Пример 7. Составить уравнение прямой, проходящий через точку (–2; 5) и образующей с осью Ox угол 45º.

Решение: Угловой коэффициент искомой прямой k= tg 45º = 1. Поэтому, воспользовавшись уравнением (5), получаем $y – 5 = x– (–2)$, или $x – y + 7 = 0$.

5 Уравнение прямой, проходящей через две точки

Уравнение прямой, проходящей через две точкит. $A\ (x_1; y_1)$ и т.$B\ (x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad (6)$$

Пример 8. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(–3; 5)$и $B(7; –2)$.

Решение: Воспользуемся уравнением (6):

$\frac{x-(-3)}{7-(-3)}=\frac{y-5}{-2-5}$, или $\frac{x+3}{10}=\frac{y-5}{-7}$, откуда $7x + 10y – 29 = 0$.

6 Нормальное уравнение прямой

Пусть дана прямая С, проходящая через данную точку Мо(Хо; Уо) и перпендикулярная вектору $\bar{n}$ (А;В). Любой вектор $\bar{n}\neq\bar{o}$, перпендикулярный данной прямой ℓ, называется ее***нормальным вектором.***

Выберем на прямой произвольную т. М*(x;y).* Тогда $\bar{n}\perp\overline{M_0M}$, а значит их скалярное произведение $\bar{n}\cdot\overline{M_0M}=0$. Это равенство можно записать в координатах

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)=0 \qquad (7)$$

Уравнение (7) называется ***нормальным уравнением прямой***.

Пример9. Даны точки $M_1(2;-1)$ и $M_2(4; 5)$. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M_1перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$

Решение: Нормальный вектор искомой прямой $\bar{n} = \overline{M_1M_2}$ имеет координаты (2;6), следовательно по формуле (7) получим уравнение $2(x-2)+6(y+1)=0$ или $x+3y+1=0$.

7 Параметрическое и каноническое уравнения прямой

Пусть прямая l задана начальной точкой $M_0\ (x_0;\ y_0)$и направляющим вектором $\vec{a}\,(a_1;a_2)$,. Пусть т. $M(x\ ;\ y)$ – любая точка, лежащая на прямой l. Тогда вектор $\cdot\overline{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$. Следовательно, $\cdot\overline{M_0M} = t\vec{a}$. Записывая это уравнение в координатах, получаем параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t; \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases} \qquad (8)$$

Исключим параметр t из уравнения (9). Это возможно, так как вектор $\bar{a} \neq 0$, и потому хотя бы одна из его координат отлична от нуля.

Пусть $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, тогда $t = \dfrac{x - x_0}{a_1}$, $t = \dfrac{y - y_0}{a_2}$ и, следовательно,

27

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}. \qquad (9)$$

Уравнение (9) называется ***каноническим уравнением прямой*** с направляющим вектором $\vec{a}=(a_1;\ a_2)$. Если $a_1=0$и $a_2 \neq 0$, то уравнения (8) примут вид

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}.$$

Этими уравнениями задается прямая, параллельная осиOy и проходящая через точку $M_0\ (x_0;\ y_0)$. Каноническое уравнение такой прямой имеет вид

$$x=x_0 \qquad (10)$$

Если $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, то уравнения (8) примут вид

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t; \\ y = y_0 \end{cases}$$

Этими уравнениями задается прямая, параллельная оси Оx и проходящая через точку $M_0\ (x_0;\ y_0)$. Каноническое уравнение такой прямой имеет вид

$$y=y_0 \qquad (11)$$

8 Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть даны две прямые, заданные общими уравнениями:

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Тогда угол φмежду ними определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (12)$$

Пример 10. Вычислить угол между прямыми $2x + 3y - 7 = 0$ и $3x - 7y + 4 = 0$.

Решение: $cos\,\varphi = \dfrac{|2\cdot3+3\cdot(-7)|}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{3^2+(-7)^2}} = \dfrac{15}{\sqrt{13}\sqrt{58}} = 0{,}546$; $\varphi = \arccos 0{,}546 \approx 57^0$.

Условие параллельности 2-х прямых: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$ (13)

Условие перпендикулярности 2-х прямых: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ (14)

Пример 11. Выяснить взаимное расположение прямых:

а) $4x-5y+3=0$ *и* $5x+4y+11=0$

б) $-3x-7y+6=0$ *и* $9x+21y-1+0$

Решение: а) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{4}{5} \neq \dfrac{-5}{4} = \dfrac{B_1}{B_2}$ – *значит, прямые не параллельны*;

б) $A_1A_2 + B_1B_2 = 4\cdot5+(-5)\cdot4 = 0$ – *значит, прямые перпендикулярны.*

Если прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$y = k_1x + b_1$ $y = k_2x + b$

то угол φ между ними вычисляется по формулам

$$cos\varphi = \frac{|k_1k_2+1|}{\sqrt{k_1^2+1}\cdot\sqrt{k_2^{\ 2}+1}} \quad \text{или} \quad tg\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \qquad (15)$$

Пример 12. Вычислить угол между прямыми $y = 2x-3$ *и* $y = \dfrac{5}{7}x+4$

Решение: $\kappa_1 = 2$ *и* $\kappa_2 = \dfrac{5}{7}$

$$cos\varphi = \frac{\left|2\cdot\frac{5}{7}+1\right|}{\sqrt{2^2+1}\cdot\sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^2+1}} = \frac{\frac{17}{7}}{\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{74}}{7}} = \frac{17}{\sqrt{5\cdot74}} = 0{,}883; \quad \varphi = \arccos 0{,}883 \approx 28^0.$$

Условие параллельности в этом случае имеет вид: $k_1 = k_2$ (16)

Условие перпендикулярности прямых: $k_1\cdot k_2 = -1$ (17)

Пример 13. Выяснить взаимное расположение прямых:

а) $y = 4x-3$ *и* $y = 4x+10$

б) $y = \dfrac{1}{2}x+7$ *и* $y = -2x+9$

Решение:

а) $k_1 = k_2 = 4$ – *значит, прямые параллельны*

б) $k_1\cdot k_2 = \dfrac{1}{2}\cdot(-2) = -1$ – *значит, прямые перпендикулярны*

Если две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2}$$

то угол φ между этими прямыми определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{|a_1b_1+a_2b_2|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}} \qquad (18)$$

Пример: найти угол между прямыми $\dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y+2}{7}$ и $\dfrac{x+3}{6} = \dfrac{y-8}{11}$.

Решение: $\cos\varphi = \dfrac{|5\cdot 6 + 7\cdot 11|}{\sqrt{5^2+7^2}\cdot\sqrt{6^2+11^2}} = \dfrac{101}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{157}} = 0{,}937; \quad \varphi = \arccos 0{,}937 \approx 20^0$.

Условие параллельности прямых: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$ (19)

Условие перпендикулярности прямых: $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ (20)

Пример:выяснить взаимное расположение прямых:

а) $\dfrac{x+6}{4} = \dfrac{y-9}{-5}$ и $\dfrac{x-6}{-8} = \dfrac{y-8}{10}$;

б) $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+9}{-7}$ и $\dfrac{x+5}{14} = \dfrac{y+9}{2}$.

Решение:а) $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{4}{-8} = \dfrac{-5}{10} = \dfrac{a_2}{b_2}$ - прямые параллельны;

б) $a_1b_1 + a_2b_2 = 1\cdot 14 + (-7)\cdot 2 = 0$ - значит, прямые перпендикулярны.

9 Расстояние от точки до прямой

Расстояние *d*от точки *M(x₁; y₁)* до прямой *Ax+By+C=0* вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + y_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (22)$$

Пример: Вычислить расстояние от точки М(6; 8) до прямой $4x + 3y + 2 = 0$

Решение: по формуле (22) получим: $d = \dfrac{|4\cdot 6 + 3\cdot 8 + 2|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{50}{5} = 10$.

Ход работы

Вариант1

1. Привести общее уравнение прямой 2х+3у-6=0 к уравнению в отрезках и вычислить площадь треугольника, отсекаемого этой прямой от соответствующего координатного угла;
2. В ΔАВС вершины имеют координаты точки А (-3;4), точки В (-4;-3), точки С (8;1). Составить уравнения стороны (АВ), высоты (ВК) и медианы (СМ);
3. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через точку M_0 (-2;4) и параллельной вектору $\bar{a}$(6;-1);
4. Вычислить угол между прямыми

   а) $\dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-2}{4}$ и $\dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y+4}{-3}$; б) $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$ и $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$;
5. Определить взаимное расположение 2-х прямых 2х – 5у – 20 = 0 и 5х + 2у – 10 = 0;
6. Вычислить расстояние от середины отрезка АВ до прямой $12x - 5y + 1 = 0$, если известны координаты концов отрезка т.А(1; 6) и т.В(9; 8).

Вариант2

1. Привести общее уравнение прямой 3х-4у+12=0 к уравнению в отрезках и вычислить длину отрезка, который отсекается от этой прямой соответствующим координатным углом;
2. В ΔАВС вершины имеют координаты точки А (4;2), точки В (1;5), точки С (-2;6). Составить уравнения стороны (АВ), высоты (ВК) и медианы (СМ);
3. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через точку M_0 (3;-4)и параллельной вектору $\bar{a}$ (-7;5);
4. Вычислить угол между прямыми:

   а) 2х - 3у + 7 = 0 и 3х - у + 5 = 0 ; б) $y = \dfrac{3}{4}x - 5$и у = 2х – 4;

5.Определить взаимное расположение 2-х прямых $\frac{x+2}{5}=\frac{y-3}{4}$ и $\frac{x-15}{-4}=\frac{y+6}{5}$;

6. Вычислить расстояние от середины отрезка АВ до прямой $7x+24y-5=0$, если известны координаты концов отрезка т.А(18;8) и т.В(-2; -6).

Вариант3

1. Привести общее уравнение прямой 4х-5у+20=0 к уравнению в отрезках и вычислить площадь треугольника, отсекаемого этой прямой от соответствующего координатного угла;
2. В ΔАВС вершины имеют координаты точки А (3;-2), точки В (7;3), точки С (0;8). Составить уравнения стороны (АВ), высоты (ВК) и медианы (СМ);
3. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через точку M_0 (-1;-2) и параллельной вектору $\bar{a}$ (3;-5);
4. Вычислить угол между прямыми

   а) 3х + у - 7 = 0 и х - у + 4 = 0; б) $\frac{x-6}{1}=\frac{y}{3}$ и $\frac{x-3}{3}=\frac{y-6}{1}$;
5. Определить взаимное расположение 2-х прямых $y=-\frac{1}{5}x+8$ и у = 5х + 3;
6. Вычислить расстояние от середины отрезка АВ до прямой $-9x+40y-8=0$, если известны координаты концов отрезка т.А(4;-3) и т.В(-6; 5).

Вариант 4

1. Привести общее уравнение прямой 12х-5у+60=0 к уравнению в отрезках и вычислить длину отрезка, который отсекается от этой прямой соответствующим координатным углом;
2. В ΔАВС вершины имеют координаты точки А (0;-2), точки В (3;6), точки С (1;-4). Составить уравнения стороны (АВ), высоты (ВК) и медианы (СМ);
3. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через точку M_0(4;4) и параллельной вектору $\bar{a}$ (-2;7);

4.Вычислить угол между прямыми

а) х +4 у + 8 = 0 и 7х - 3у + 5 = 0; б) $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{7}$ и $\frac{x-15}{5}=\frac{y+6}{-3}$;

5. Определить взаимное расположение 2-х прямых $y=\frac{2}{7}x+3$ и $y=-\frac{7}{2}x+5$;

6. Вычислить расстояние от середины отрезка АВ до прямой $3x+4y+12=0$, если известны координаты концов отрезка т.А(-4; 8) и т.В(0; 4).

Контрольные вопросы:

1. Назовите уравнения прямой на плоскости, когда известны точка, через которую она проходит и ее направляющий вектор;
2. Какой вид имеет нормальное, общее уравнения прямой на плоскости;
3. Назовите уравнение прямой, проходящей через две точки, уравнение прямой в отрезках, уравнение прямой с угловым коэффициентом;
4. Перечислите формулы для вычисления угла между прямыми, заданными уравнениями с угловым коэффициентом. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
5. Как найти расстояние от точки до прямой?

Содержание отчета.

1. Решить задание № 1-6, записать ответ.

2.. Устно ответьте на вопросы.

Практическая работа № 12

Тема: Составление уравнения окружности, эллипса, гиперболы и параболы на плоскости

Цель: Закрепить навыки решения задач на кривые второго порядка: эллипс, гиперболу и параболу

Студент должен знать:

- основные типы задач на кривые второго порядка;
- основные уравнения кривых второго порядка.

Студент должен уметь

- решать основные типы задач на кривые второго порядка

Теоретическое обоснование

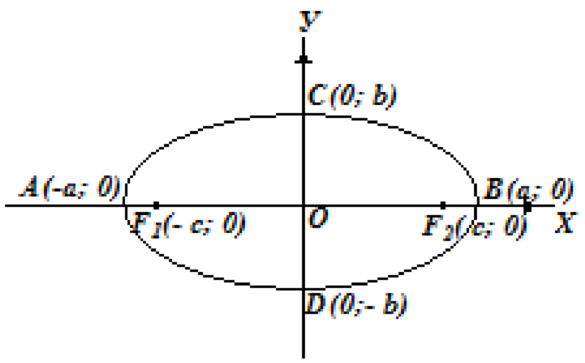
1 Эллипс

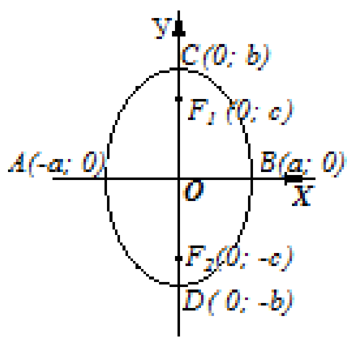
Эллипс есть множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых ***фокусами*** эллипса, есть величина постоянная (равная $2a$), большая, чем расстояние между фокусами(равное $2c$).

Простейшее уравнение эллипса получается, если расположить координатную систему следующим образом: за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1и F_2, а за ось Oy – перпендикуляр к оси абсцисс в середине отрезка $[F_1F_2]$. Тогда уравнение эллипса примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{где } b^2 = a^2 - c^2 \qquad (1)$$

Точки A и B, C и Dпересечения эллипса с его осями симметрии (координатными осями) называются ***вершинами***эллипса. Отрезки $[AB]$ – ***большой осью***, а $[CD]$ – ***малой осью***, так как $a > b$. Таким образом, параметры a и b, входящие в уравнение эллипса, равны его полуосям.





Эксцентриситетомэллипса называется отношение расстояния между фокусами к его большой оси, т.е.

$$e=\frac{c}{a} \qquad (2)$$

Очевидно, что $e< 1$.

Если эллипс, определяемый уравнением вида (1), расположен так, что его фокусы лежат на оси Oy, то тогда $b>a$ и большой осью служит отрезок $[B_1B_2]$ длиной $2b$, а малой осью – отрезок $[A_1A_2]$ длиной $2a$. Эксцентриситет такого эллипса вычисляется по формуле

$$e=\frac{c}{b}, \quad \text{где } c=\sqrt{b^2-a^2} \qquad (3)$$

Пример 1. Найти оси, вершины, фокусы и эксцентриситет эллипса $9x^2 + 25y^2 – 225 = 0$.

Решение: Приведём данное уравнение к простейшему виду (1), для чего свободный член перенесём вправо и разделим на него все члены уравнения. В результате получим

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

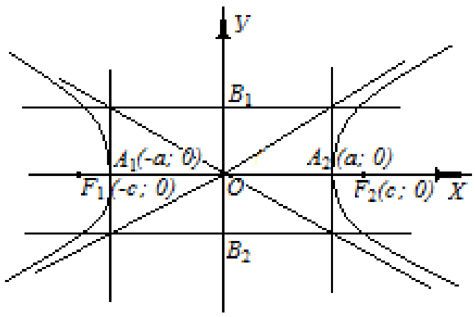
Сравнивая полученное уравнение с уравнением (1), имеем $a = 5$, $b = 3$. Отсюда находим оси эллипса $2a = 10$, $2b = 6$ и координаты вершин $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$, $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$. Далее, находим $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{25-9}=4$.

Следовательно, фокусами эллипса служат точки $F_1(-4; 0)$ и $F_2(4; 0)$. Эксцентриситет эллипса вычисляем по формуле (2): $e = c/a = 4/5$.

2 Гипербола

Гиперболой называется множество точек, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная *(2a)*, меньшая, чем расстояние между фокусами *(2c)*.

Простейшее уравнение гиперболы получается, если расположить координатную систему следующим образом: за ось OX принять прямую, проходящую через фокусы F_1 *и* F_2, за ось OY – перпендикуляр в середине отрезка $[F_1F_2]$



Тогда уравнение гиперболы примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ где } b^2 = c^2 - a^2 \qquad (4)$$

Гипербола имеет две оси симметрии (координатные оси), с одной из которых (осью абсцисс) она пересекается в двух точках A_1 и A_2, называемых *вершинами* гиперболы. Отрезок $[A_1A_2]$ длиной $2a$ называется ***действительной осью*** гиперболы, а отрезок $[B_1B_2]$ длиной $2b$ – ***мнимой осью***гиперболы. Таким образом, параметры a и b, входящие в уравнение гиперболы, равны её полуосям.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к её действительной оси:

$$e=\frac{c}{a} \qquad (5)$$

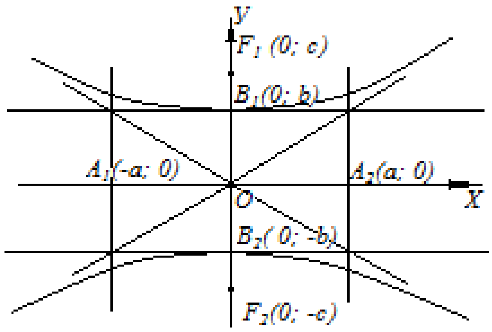
Очевидно, что $e > 1$.

Гипербола имеет две ***асимптоты,***уравнения которых

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y=-\frac{b}{a}x \qquad (6)$$

Если мнимая ось гиперболы направлена по оси OX и имеет длину $2a$, а действительная ось длиной $2b$ направлена по оси OY, то уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (7)$$



Эксцентриситет такой гиперболы вычисляется по формуле

$e = \frac{c}{b}$ (8)

Её асимптоты те же, что и у гиперболы (4). Гиперболы (4) и (7) называются ***сопряжёнными.*** Гипербола называется ***равносторонней,*** если её действительная и мнимая оси равны, т.е. $a = b$. Простейшие уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad (9)$$

Пример 2. Найти оси, вершины, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$.

Решение: Перенесём свободный член вправо и разделим на него все члены данного уравнения. В результате получим простейшее уравнение гиперболы

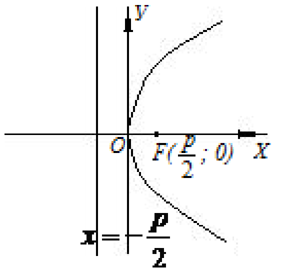
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

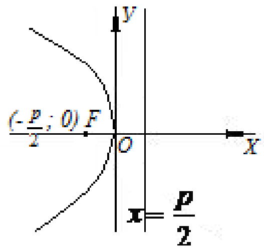
Сравнивая это уравнение с уравнением (4), имеем $a = 3$, $b = 4$. Таким образом, действительная ось гиперболы$2a = 6$, а мнимая ось $2b = 8$; координаты вершин $A_1(-3; 0)$ и $A_2(3; 0)$. Далее, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+16} = 5$, следовательно, фокусами гиперболы служат точки $F_1(-5; 0)$ и $F_2(5; 0)$. Эксцентриситет гиперболы вычисляем по формуле (5): $e = c/a = 5/3$. Наконец, подставляя значения $a = 3$, $b = 4$ в формулы (6), получим уравнения асимптот гиперболы $y = \frac{4x}{3}$ и $y = -\frac{4x}{3}$.

3 Парабола

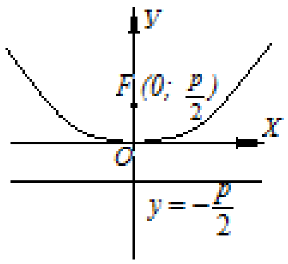
Параболой называется множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой ***фокусом***, и данной прямой, называемой ***директрисой*** параболы.

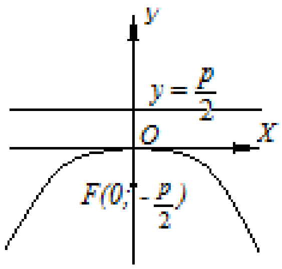
Величинаp, равная расстоянию от фокуса до директрисы, называется ***параметром***параболы. Прямая, проходящая через фокус параболы перпендикулярно её директрисе, называется ***осью,*** а точка пересечения параболы с её осью –***вершиной*** параболы.Простейшее уравнение параболы получается, если координатная система расположена следующим образом: за одну из координатных осей берётся ось параболы, а за другую – прямая, перпендикулярная оси параболы и проведённая посредине между фокусом и директрисой. Тогда уравнение параболы примет вид:





$y^2 = 2px$ (10) $y^2 = -2px$ (11)





$x^2 = 2py$ (12) $x^2 = -2py$ (13)

Уравнение $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ (14)
определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси абсцисс. Аналогично, уравнение

$x = my^2 + ny + p (m \neq 0)$ (15)
определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси ординат. Уравнения (14) и (15) приводятся к простейшему виду (10) – (13) путём тождественных преобразований с последующим переносом координатной системы.

Пример 3. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат и фокусом в точке $F(0; -8)$.
Решение: Фокус параболы лежит на оси ординат, а вершина – в начале координат, поэтому уравнение параболы можно записать либо в виде $x^2 = 2py$, либо в виде $x^2 = -2py$. Далее, поскольку ордината фокуса отрицательна, уравнение параболы следует искать в виде $x^2 = -2py$. Из координаты фокуса параболы имеем $p/2 = 8$, откуда $p=16$ и $2p = 32$, и окончательно получаем $x^2 = -32y$.

Ход работы

Вариант1

1. Составить уравнение окружности, концы диаметра которой имеют координаты (0; 3) и (6; -7);
2. Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси ОХ, если расстояние между фокусами равно 20, а эксцентриситет $e = 5/6$;
3. Дана гипербола $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{63} = 1$. Найдите вершины, фокусы, эксцентриситет, асимптоты этой гиперболы;
4. Парабола задана уравнением $y^2 = 14x$. Указать координаты фокуса параболы и уравнение её директрисы;
5. Составить уравнение окружности, центр которой лежит в фокусе параболы $y^2 = -8x$, а радиус равен действительной оси эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;

Вариант 2

1. Составить уравнение окружности, концы диаметра которой имеют координаты (-2; 3) и (2; 5);

2.Уравнение эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Найти расстояние между фокусами и эксцентриситет эллипса;

3.Дана гипербола $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{256}=1$. Найдите вершины, фокусы, эксцентриситет асимптоты этой гиперболы;

4. Парабола задана уравнением y^2 = -5x. Указать координаты фокуса параболы и уравнение её директрисы;

5. Составить уравнение параболы, вершина которой лежит в начале координат, а фокус совпадает с центром окружности $x^2+y^2-8y+12=0$;

Вариант 3

1. Составьте уравнение окружности с центром в точке (-1; 4) и проходящей через точку (3; 5);

2.Уравнение эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$. Найти расстояние между фокусами и эксцентриситет эллипса.

3.Составить уравнение гиперболы, если длина её действительной оси равна 12, а эксцентриситет равен $\frac{4}{3}$. Найти её фокусное расстояние и асимптоты;

4. Парабола задана уравнением $y^2 = 6x$. Указать координаты фокуса параболы и уравнение её директрисы;

5. Составить уравнение окружности с центром в точке (-3; 8), диаметр которой равен фокусному расстоянию эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$;

Вариант 4

1. Составьте уравнение окружности с центром в точке (-3; 04) и проходящей через точку (2; 4);

2.Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси OX, если расстояние между фокусами равно 12, а эксцентриситет $e = 1/3$.

3. Найдите вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{144}=1$.

4. Парабола задана уравнением $y^2 = -4x$. Указать координаты фокуса параболы и уравнение её директрисы;

5. Составит уравнение гиперболы, фокусы которой совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$, а эксцентриситет равен $\frac{4}{3}$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение эллипса и назовите его каноническое уравнение. Что такое большая и малая полуоси эллипса, его фокусы, вершины? Укажите их координаты.
2. Что такое эксцентриситет эллипса, какой он по значению, что он характеризует?
3. Дайте определение гиперболы и назовите ее каноническое уравнение. Что такое действительная и мнимая полуоси гиперболы, асимптоты, фокусы, вершины? Укажите их координаты.
4. Что такое эксцентриситет гиперболы, какой он по значению ?
5. Дайте определение параболы .
6. Укажите каноническое уравнение параболы в зависимости от ее расположения на координатной плоскости. Что такое параметр параболы, фокус и директриса параболы?

Содержание отчета.

1. Решить задание № 1-5, записать ответ.
2.. Устно ответьте на вопросы.

Список литературы

1. Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики : учебник : в 2 томах. Том 1 / В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев. — Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2021. — 304 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-906923-05-9. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1235904 (дата обращения: 27.01.2021). – Текст : электронный.

2. Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики : учебник : в 2 томах. Том 2 / В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев. — Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2021. — 368 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-16-104732-3. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1178146 (дата обращения: 27.01.2021). – Текст : электронный.

3.Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова, И. И. Цыганок, И. А. Александрова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 472 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01497-6. — URL: https://urait.ru/bcode/471507 (дата обращения: 27.01.2021). — Текст : электронный.